XLVIII ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА ЮНИХ ФІЗИКІВ

III етап, Харківська обл., 2011 р.

8 КЛАС

♦ Задача № 1

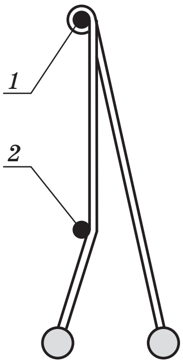
Велосипедист повинен проїхати певну відстань. Зі швидкістю 45 км/год він долає половину цієї відстані, після чого внаслідок поломки велосипеда змушений пройти половину відстані, що залишилася, зі швидкістю 5 км/год. а) Знайдіть середню швидкість, з якою велосипедист подолав усю відстань. б) Наскільки великою могла б бути середня швидкість велосипедиста, якби він міг проїхати першу половину шляху із як завгодно великою швидкістю?

♦ Задача № 2

Щоб зупинити зниження аеростата, пілот викинув за борт баласт. Пілот побачив, що баласт досяг поверхні землі через 20 с після кидка. Ще через 3 с він почув звук удару баласту об землю. Як рухався аеростат після викидання баласту — угору чи вниз? Знайдіть середню швидкість руху аеростата після викидання баласту. Швидкість вантажу можна вважати незмінною й рівною 50 м/с, швидкість звуку — незмінною й рівною 340 м/с, погоду — безвітряною.

♦ Задача № 3

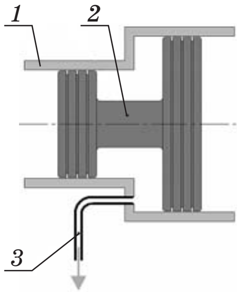
Тягарець на нитці, прив'язаній до цвяха (1), вбитого в стіну (*див. рис. 1*), здійснює малі коливання в площині, яка паралельна стіні. Період коливань — T, довжина нитки $L = 1$ м. У стіну можна вбити другий цвях (2) так, що маятник частину свого руху здійснюватиме, обертаючись навколо нього, як показано на рисунку 1. Куди слід вбити цвях, щоб рух маятника мав період $\frac{3}{4}T$?



■ Рис. 1

♦ Задача № 4

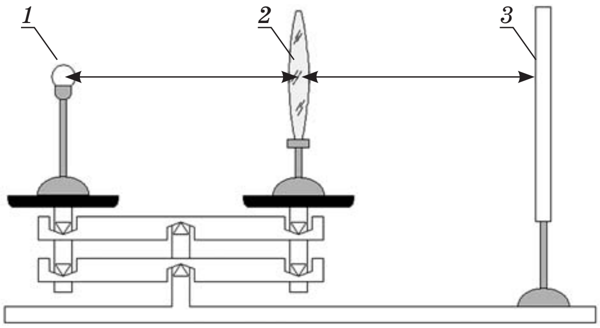
У циліндрі (1), складеному з двох частин різних діаметрів, знаходиться поршень (2), здатний без тертя ковзати всередині циліндра (*див. рис. 2*). З циліндра патрубком (3) відкачується повітря. Чи переміщуватиметься поршень? Якщо так, то яку силу і в якому напрямку необхідно прикласти до поршня, щоб його зупинити? Площі перерізів циліндра дорівнюють $S_1 = 10\text{ см}^2$, $S_2 = 20\text{ см}^2$. Зовні тиск повітря дорівнює атмосферному. Насос, який здійснює відкачування, здатен видалити з циліндра практично все повітря.



■ Рис. 2

♦ Задача № 5

На одній чаші терезів знаходиться джерело світла (1), а на іншій — збиральна лінза (*див. рис. 3*). Лінза формує зображення джерела на екрані (3). Коромисло терезів здійснює коливання, унаслідок чого лінза, джерело й зображення на екрані рухаються поступально вгору-вниз. Амплітуди коливань джерела світла й лінзи дорівнюють $a = 1$ см. Відстані від центру лінзи до зображення й від центру лінзи до джерела рівні між собою. Знайдіть амплітуду коливань зображення.

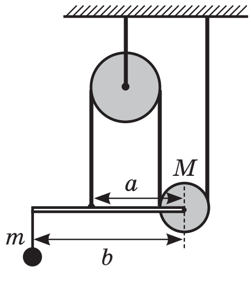


■ Рис. 3

9 КЛАС

♦ Задача № 1. «Блоки й нитки»

Вантаж масою m підвішений до кінця легкої горизонтальної балки, прикріпленої до системи блоків за допомогою ниток, як показано на рисунку 1. Довжина балки — b, відстань від осі рухомого блока, на якому закріплений



■ Рис. 1

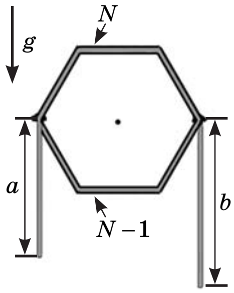
другий кінець балки, до точки кріплення нитки — a. Ділянки нитки, які не лежать на блоках, вертикальні, нитку вважати легкою та нерозтяжною. Якою має бути маса рухомого блока M, щоб система перебувала в рівновазі?

♦ **Задача № 2. «З пустого в порожнє»**

Є дві посудини з водою, в одній — вода маси m_1 й температури T_1, а в другій — вода маси m_2 й температури T_2. З однієї посудини в іншу перелили певну кількість води й почали підігрівати обидві посудини з однаковою тепловою потужністю. Скільки води і в яку з посудин перелили, якщо вони обидві закипіли одночасно? Вода з якої з посудин википить раніше?

♦ **Задача № 3. «Порожниста трубка»**

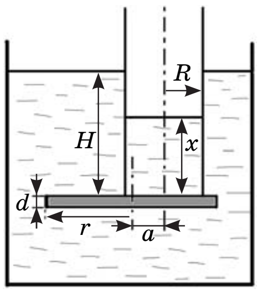
Гладенька зсередини жорстка трубка намотана в N обертів на горизонтальну балку, переріз якої являє собою правильний шестикутник, так, що її кінці перебувають на рівні осі балки (*див. рис. 2*). У трубку протягнутий гнучкий канат довжини L так, що обидва його кінці звисають на довжини a та b відповідно. Канат починає вислизати без початкової швидкості. Знайдіть швидкість каната в момент виходу з трубки.



■ **Рис. 2**

♦ **Задача № 4. «Трубки й пластинки»**

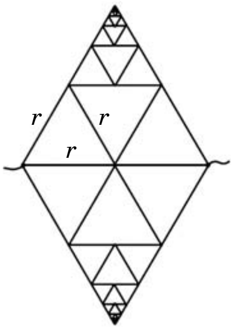
Циліндрична трубка радіуса R, закрита знизу круглою металевою пластинкою радіуса r й товщини d, занурена у воду на глибину H (*див. рис. 3*). Відстань між осями трубки й пластинки становить a. До якої висоти x потрібно налити воду в трубку, щоб пластинка відвалилася? Густина води — ρ_0, густина пластинки — $\rho > \rho_0$.



■ **Рис. 3**

♦ **Задача № 5. «Фрактальне коло»**

Електричне коло зібране з дроту, виготовленого з одного матеріалу й з однаковим перерізом, як показано на рисунку 4. Воно являє собою ромб, складений із двох рівносторонніх трикутників. Верхній великий трикутник ділиться таким самим дротом на чотири однакові рівносторонні трикутники удвічі меншого розміру. Верхній із цих чотирьох так само ділиться на чотири тощо. Нижній великий трикутник ділиться так само. Знайдіть повний опір кола, якщо відстань між клемами становить $2a$, опір дроту на одиницю довжини дорівнює r.

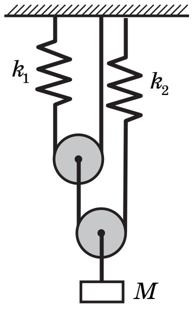


■ **Рис. 4**

10 КЛАС

♦ **Задача № 1**

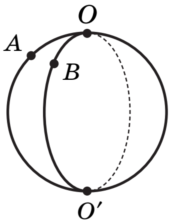
У зображеній на рисунку системі пружини мають жорсткості $k_1 = 100$ Н/м і $k_2 = 200$ Н/м. До нижнього блока підвішують вантаж масою $M = 8$ кг. Знайдіть зміщення нижнього блока після того, як система повернеться в рівновагу. Пружини, нитки й блоки вважати невагомими, а нитки нерозтяжні. Прискорення вільного падіння $g = 10$ м/с^2.



■ **Рис. 1**

♦ **Задача № 2**

Два однакові провідні дротяні кільця радіуса L з'єднали в діаметрально протилежних точках O і O', як показано на рисунку. Опір довжини одиниці дроту дорівнює ρ. Дуги AO і BO рівні, і їхня довжина — x. Знайдіть залежність опору між точками A і B від величини x.



■ **Рис. 2**

♦ **Задача № 3**

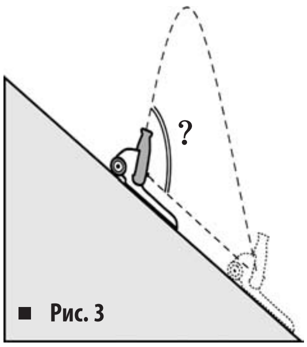
У циліндричну посудину з площею основи $S = 100$ см^2, наливають 1 л солоної води з густиною $\rho = 1{,}15$ г/см^3 й опускають крижинку з прісної води. Маса крижинки $m = 1$ кг. Визначте, як зміниться рівень води в посудині, якщо половина крижинки розтане. Вважати, що при розчинені солі у воді об'єм рідини не зміниться.

♦ **Задача № 4**

Плоске дзеркало розташоване справа від лінзи на фокусній відстані f. Знайдіть, на якій відстані від лінзи знаходитиметься зображення предмета, розташованого зліва від лінзи на відстані a $(a > f)$.

♦ **Задача № 5**

З гармати, яка стоїть на похилій площині, робиться постріл. У момент пострілу гармата зривається з кріплень і починає зісковзувати вниз із нульовою початковою швидкістю. Ядро вилітає й потрапляє в гармату,



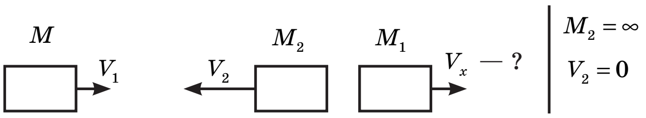
■ **Рис. 3**

яка зісковзує (*див. рис. 3*). Коефіцієнт тертя ковзання гармати об площину дорівнює μ. Нехтуючи опором повітря, визначте, під яким кутом до похилої площини вилетіло ядро з гармати.

11 КЛАС

♦ Задача № 1

З якою швидкістю V_x має врізатися в стіну автомобіль масою M_1, щоб зіткнення було цілком аналогічним до зіткнення цього автомобіля з автомобілем масою M_2, якщо перший автомобіль їхав зі швидкістю V_1, а другий — зі швидкістю V_2? Припускаємо, що співудари в обох випадках непружні. Розгляньте окремий випадок рівних мас M_1 і M_2 та рівних за величиною швидкостей V_1 та V_2. Степінь руйнування визначаємо за кількістю на одиницю маси кінетичної енергії, яка перейшла у внутрішню.



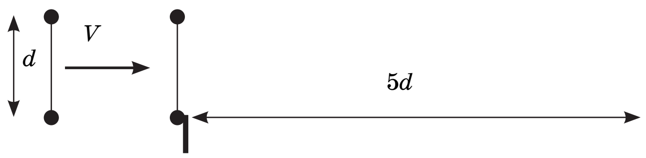
■ **Рис. 1**

♦ Задача № 2

У замкнутій посудині за температури $20\,^\circ\mathrm{C}$ знаходиться 1 кг води в рівновазі з парою. У якийсь момент пару починають відкачувати зі швидкістю 1 грам на секунду. Оцініть час, за який рідкої води не залишиться в посудині. Вважати, що густина насиченої пари не залежить від температури і процес замерзання не заважає процесу випаровування. Теплоємність води — 4,1868 кДж/кг·град, питома теплота пароутворення — 2250 кДж/кг, питома теплота плавлення — 333,55 кДж/кг.

♦ Задача № 3

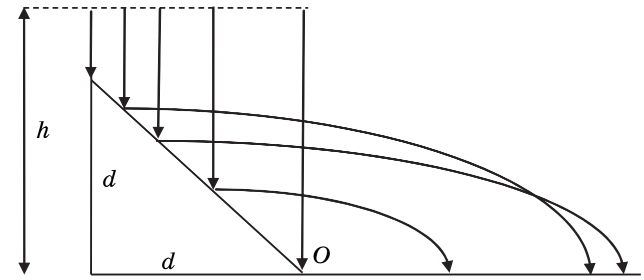
Космічний корабель у формі гантелі летить, не обертаючись, і зіштовхується з маленькою, але важкою плоскою перешкодою. Опишіть подальший рух корабля. За який час після співудару центр тяжіння корабля зміститься на відстань 5 діаметрів? Розгляньте випадок абсолютно пружного удару й випадок, коли під час удару нижня куля зупиняється.



■ **Рис. 2**

♦ Задача № 4

З однакової висоти з початковою швидкістю, яка дорівнює нулю, на нерухомий рівнобедрений клин падають маленькі кульки й пружно відскакують від його похилої поверхні. З якої мінімальної висоти повинні падати кульки, щоб жодна з них двічі не потрапила на клин. Зіткненнями кульок між собою можна знехтувати. На яку найбільшу відстань від клину відлетять кульки?

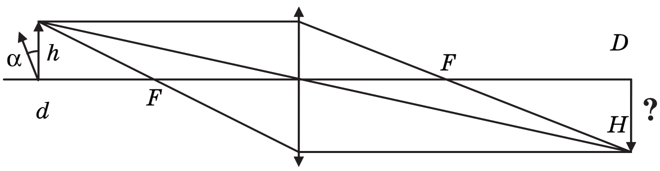


■ **Рис. 3**

♦ Задача № 5

Як зміниться зображення об'єкта в лінзі, якщо об'єкт повернути на заданий кут.

Знайдіть кут повороту зображення.



■ **Рис. 4**

РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ

8 КЛАС

♦ Задача № 1

а) Позначимо всю відстань через L, швидкість на першій половині шляху — через v_1, а на другій — через v_2. За визначенням, середня швидкість $v = L/t$, де t — час, за який пройдена відстань L. У свою чергу $t = L/(2v_1) + L/(2v_2)$. Тоді

$$v = 2v_1 v_2/(v_1 + v_2) = 2 \cdot 45 \cdot 5/50 = 9\ (\text{км/год}).$$

б) Чим більша швидкість, тим менше часу знадобиться на подолання певної відстані. Припустимо, що велосипедист першу половину відстані подолав миттєво. Тоді час, витрачений на весь шлях, цілком складається з часу, витраченого після поломки велосипеда: $t = L/(2v_2)$. У цьому випадку

$$v = L/t = 2v_2 = 10\ \text{км/год},$$

що ненабагато відрізняється від результату попереднього пункту.

♦ Задача № 2

Баласт, падаючи зі швидкістю $v_1 = 50$ м/с протягом часу $t_1 = 20$ с, пролітає відстань $h_1 = v_1 t_1 =$

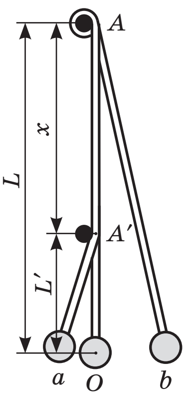
$= 1000$ м. На такій висоті перебував аеростат у момент скидання баласту. За час $t_2 = 3$ с звук зі швидкістю $v_2 = 340$ м/с проходить відстань $h_2 = v_2 t_2 = 1020$ м. На цій висоті пілот почув звук удару баласту об землю. Оскільки $h_2 > h_1$, то після скидання баласту аеростат почав набирати висоту. Середня швидкість його підіймання —

$$v = (h_2 - h_1)/(t_1 + t_2) \approx 1 \text{ м/с}.$$

Примітка. Строго кажучи, час t_1 складається з часу падіння баласту $t_б$, часу розповсюдження світлового сигналу від місця падіння до спостерігача $t_с$ і часу реакції людини $t_р$. Однак порівняно з 20 с двома останніми часовими інтервалами можна знехтувати: $t_с \sim \dfrac{1000 \text{ м}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} \sim 3 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, $t_р \sim 10^{-1} \text{ с}$. Окрім того, у чисельній відповіді ми знехтували t_2 порівняно з t_1, що відповідає малості швидкості баласту порівняно зі швидкістю звука.

♦ Задача № 3

Позначимо відстань між цвяхами через x. Протягом частини часу маятник поводиться, як математичний маятник довжини L з періодом T, а протягом решти часу — як маятник довжини $L' = L - x$ з деяким періодом T'. Позначимо період маятника із забитим другим цвяхом через T''. Останній складається з двох частин: часу руху t з довжиною L і часу руху t' з довжиною L'. Відомо, що математичний маятник проходить від положення з максимальним відхиленням до положення рівноваги за четверть періоду. Відповідно, забивши другий цвях так, щоб положення рівноваги маятника довжини L і маятника довжини L' збігалися, можна бути впевненими, що відстань від крайнього правого положення b до положення рівноваги O маятник проходить за $T/4$, а відстань від положення рівноваги до крайнього лівого положення a — за $T'/4$ (див. рис. 1). Зворотний рух від a до O триває $T'/4$, а від O до b — $T/4$. Таким чином,



■ Рис. 1

$$t' = T/4 + T/4 = T/2;$$

$$t = T'/4 + T'/4 = T'/2;$$

$$T'' = t + t' = (T + T')/2 = T(1 + T'/T)/2.$$

Період математичного маятника пропорційний до кореня з довжини, тож $T'/T = \sqrt{L'/L}$ і $(T'/T)^2 = L'/L$. З іншого боку, $T'/T = 2T''/T - 1$, значить,

$$L' = L(2T''/T - 1)^2;$$

$$x = L - L' = L\left(1 - (2T''/T - 1)^2\right) =$$

$$= 4LT''/T(1 - T''/T) = 0{,}75 \text{ м}.$$

Цей розв'язок у загальному вигляді доволі громіздкий, тож для школярів більш прийнятно безпосередньо одержати числову відповідь:

$$T'' = T(1 + T'/T)/2 \;;$$

$$3/4 = (1 + T'/T)/2 \;;$$

$$T'/T = 1/2;$$

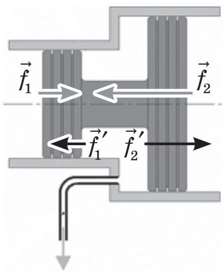
$$L'/L = 1/4; \; x = L - L' = 3/4L.$$

Отже, шуканий період одержимо, забивши другий цвях на відстані $0{,}75$ м прямовисно під першим цвяхом.

Примітка. Вимога малості коливань обмежує геометричне місце точок підвісу A' прямовисною лінією, проведеною з A.

♦ Задача № 4

Рух поршня по циліндру визначається силами тиску повітря, які діють на нього зсередини й зовні. Позначимо їх через F_1 і F_2 відповідно. Сила F_1 створюється силою тиску f_1 на ліву поверхню поршня S_1 й силою тиску f_2 на праву поверхню поршня S_2:



■ Рис. 2

$$f_1 = pS_1;$$

$$f_2 = pS_2.$$

Сила f_1 напрямлена вправо, а f_2 — вліво. Оскільки $S_2 > S_1$, то $f_2 > f_1$ і результуюча сила тиску зовнішнього повітря буде напрямлена вліво. Її величина дорівнює

$$F_1 = pS_2 - pS_1 = p(S_2 - S_1).$$

Цю силу врівноважу сила F_2 тиску на поршень з боку газу всередині циліндра. Вона напрямлена протилежно до F_1. Якщо ж тиск газу всередині циліндра зменшиться (унаслідок відкачування), то зменшиться й сила тиску F_2, рівновага порушиться й поршень почне переміщатися в бік дії сили F_1.

Якщо насос викачає з циліндра все повітря, то воно вже не створюватиме силу тиску на поршень зсередини циліндра, і на поршень діятиме тільки сила тиску з боку зовнішнього повітря F_1. Щоб поршень залишався нерухомим за цих умов, на нього потрібно подіяти протилежно напрямленою F_1, а також рівною їй за величиною силою F_x:

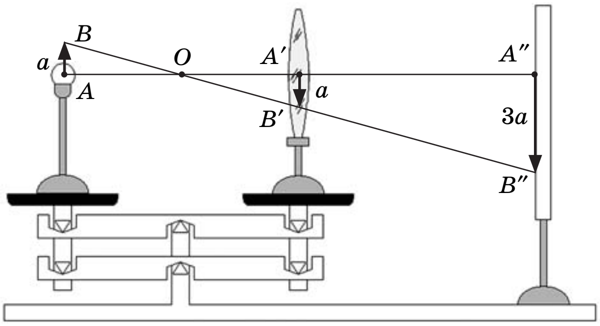
$$F_x = p\left(S_2 - S_1\right) = 10\,Н/см^2 \cdot \left(20\,см^2 - 10\,см^2\right) = 100\,Н.$$

Примітка. Учні 8 класу можуть обчислити силу тиску F_2 в описаний нижче спосіб. Сили тиску, які діють на поверхні,— S_1', S_2'. Отже, $f_1' = p'S_1'$; $f_2' = p'S_2'$; $F_1 = f_2' - f_1' = p'\left(S_2' - S_1'\right)$, де p' — тиск усередині циліндра. Припустивши, що $S_1' - S_1 = S_2' - S_2$, отримаємо $F_1 = p'\left(S_2 - S_1\right)$. З рівності величин F_1 і F_2 отримаємо рівність тисків усередині й поза циліндром. Цей результат можна зрозуміти й інтуїтивно як наслідок закону Паскаля, оскільки поршень переміщується по циліндру тільки під дією сил тиску, так само, як і газ у процесі вирівнювання тиску за об'ємом. Тому цілком припустимим є й такий спосіб розв'язання: тиск повітря всередині циліндра — сталий, тоді як рух поршня вліво супроводжується зменшенням об'єму газу. Отже, щоб тиск залишався незмінним, газ має залишати займаний об'єм, що й відбувається під час відкачування.

♦ Задача № 5

Наведемо способи розв'язання, відомі авторам на сьогодні, за зростанням їхньої «цінності».

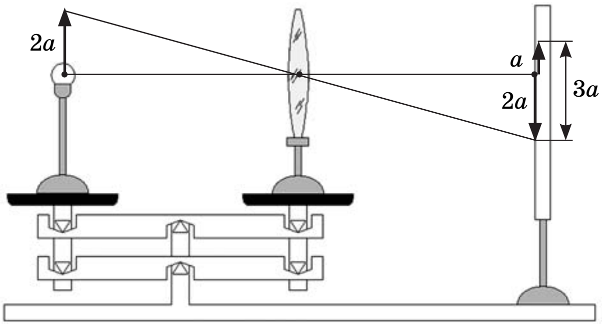
1) Мабуть, найменш раціональним є знаходження зображень джерела у двох крайніх положеннях або в рівноважному й крайньому положенні терезів. Для цього відзначаємо, що предмет і зображення віддалені від головної площини лінзи на подвійну фокусну відстань (у цьому можна переконатися, застосувавши формулу тонкої лінзи). Далі знаходимо зображення, удаючись до стандартного способу (наприклад, як перетин двох променів, що проходять через фокуси), для вибраних двох розташувань лінзи й джерела. Відстань між ними — це і є амплітуда, що, як виявляється дорівнює $3a$.



■ **Рис. 3 *а***

2) Звертаємо увагу на те, що зображення, за умовою, знаходиться на екрані. Оскільки зображення створює лінза, усі промені, випущені певною точкою джерела, потраплять у відповідну точку зображення. Щоб знайти амплітуду коливань зображення, стежитимемо за променем, який сполучає точку джерела, центр лінзи й точку зображення. Відомо, що напрям такого променя не змінюється при заломленні в лінзі. На рисунку 3*а* зображені два такі промені, які відповідають відхиленню джерела до амплітудного значення. З подібності трикутників $OA'B'$ і $OA''B''$ випливає, що амплітуда коливать точки зображення $A''B''$ дорівнює $3a$.

3) Розглянемо рух джерела й екрана відносно лінзи (*див. рис. 3б*). Відносно лінзи джерело зміщується на відстань $2a$, а зображення відносно лінзи зміщується так само, як і джерело, але в протилежному напрямку (з огляду на те, що джерело й зображення розташовані симетрично відносно центра лінзи). Екран же зміщується відносно лінзи в тому ж напрямку, що й джерело, на відстань a. Сума зміщень екрана й зображення відносно лінзи дорівнює $3a$. Цей спосіб (і споріднені з ним) до проведення олімпіади уявлялися нам як найцікавіші.



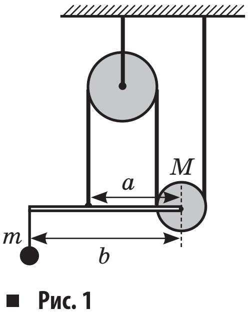
■ **Рис. 3 *б***

4) Проте найкрасивішим, на наш погляд, є розв'язок, ідея якого була підглянута в роботі одного з учасників олімпіади. Представимо рух терезів від положення рівноваги до положення максимального відхилення як послідовність двох рухів: 1) лінза стоїть на місці, джерело переміщається на $2a$ вгору; 2) лінза й джерело, не змінюючи взаємного розташування, опускаються на a вниз. Неважко побачити, що в результаті першого руху зображення зміститься вниз на $2a$, а в результаті другого руху — ще на a у тому ж напрямку. У результаті зміщення отримуємо зображення $3a$.

9 КЛАС

♦ Задача № 1. «Блоки й нитки»

По-перше, якщо знехтувати тертям у блоках, то в рівновазі сила натягу нитки однакова за довжиною. Позначимо її через T. Відповідно, нитка діє на балку й нерухомий блок із силою T, напрямленою вгору.



■ **Рис. 1**

Для рівноваги мають компенсуватися сили й моменти сил.

Рівність сил, які діють на систему «рухомий блок + балка»: $mg + Mg = 3T$.

Рівність моментів сил щодо осі рухомого блока (сумарний момент сил, які діють із боку нитки на рухомий блок, дорівнює нулю): $b \cdot mg = a \cdot T$.

Підставляючи $T = mg\dfrac{b}{a}$ у перше рівняння, отримуємо

$$M = m\left(\frac{3b}{a} - 1\right).$$

♦ Задача № 2. «З пустого в порожнє»

Нехай $T = 100\ ^\circ\mathrm{C}$. Введемо позначення: $\tau_1 = T - T_1$; $\tau_2 = T - T_2$. Нехай також Δm — маса води, яку перелили з другої посудини в першу (якщо насправді перелили з першої в другу, то ця величина від'ємна). Умова одночасного закипання — рівність кількості теплоти, яку необхідно витратити для нагрівання першої й другої посудини до $100\ ^\circ\mathrm{C}$, після перемішування:

$$m_1\tau_1 + \Delta m\tau_2 = (m_2 - \Delta m)\tau_2.$$

Виражаючи Δm, отримуємо:

$$\Delta m = \frac{m_2\tau_2 - m_1\tau_1}{2\tau_2}.$$

Раніше википить вода в тій із посудин, в якій у момент закипання (а значить, і після переливання) було менше води. Маси води в посудинах після переливання:

$$m_1' = m_1 + \Delta m = m_1 + \frac{m_2\tau_2 - m_1\tau_1}{2\tau_2} = \frac{m_1(2\tau_2 - \tau_1) + m_2\tau_1}{2\tau_2};$$

$$m_2' = m_2 - \Delta m = m_2 + \frac{m_2\tau_2 - m_1\tau_1}{2\tau_2} = \frac{m_1\tau_1 + m_2\tau_2}{2\tau_2}.$$

Тоді раніше википить вода в першій посудині, якщо $m_1' < m_2' \Leftrightarrow 2\tau_2 - \tau_1 < \tau_1 \Leftrightarrow \tau_2 < \tau_1 \Leftrightarrow T_1 < T_2$, тобто якщо на самому початку її температура була меншою, ніж температура другої.

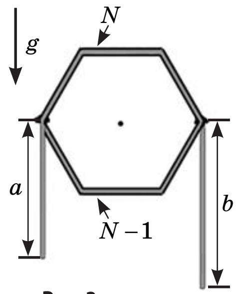
Такий самий результат можна було отримати відразу в результаті таких міркувань: раніше википає вода в тій посудині, в якій після переливання маса води менша. Однак оскільки обидві посудини закипають одночасно й кількість теплоти на їх нагрівання до температури кипіння була витрачена однакова, до нагрівання в шуканої посудини мала бути нижча температура. Отже, і до переливання її температура була нижча.

♦ Задача № 3. «Порожниста трубка»

Насамперед знайдемо довжину ребра призми d.

$$L = a + b + 3d \cdot N + 3d \cdot (N-1) \Rightarrow d = \frac{L - a - b}{3(2N-1)}.$$

Далі задача розв'язується із застосуванням закону збереження енергії. Висоту відраховуємо від осі балки. Якщо лінійна густина каната дорівнює ρ, то спочатку його потенційна енергія в полі сили тяжіння складається з потенційних енергій звисаючих кінців (їхні центри тяжіння нижчі за вісь на $\dfrac{a}{2}$ й $\dfrac{b}{2}$ відповідно), енергії повних $N-1$ кілець навколо балки (яка дорівнює нулю, оскільки центр тяжіння кожного кільця знаходиться на осі балки) та енергії «зайвої» півпетлі зверху:



■ Рис. 2

$$U_1 = -\rho a \cdot g \cdot \frac{a}{2} - \rho b \cdot g \cdot \frac{b}{2} + 6\rho d(N-1) \cdot g \cdot 0 +$$
$$+ 2\rho d \cdot g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} d + \rho d \cdot g \cdot \sqrt{3}\, d = \rho g\left(-\frac{a^2 + b^2}{2} + 2\sqrt{3}\, d^2\right).$$

У момент відриву аналогічно:

$$U_2 = -\rho L \cdot g \cdot \frac{L}{2} = -\rho g \cdot \frac{L^2}{2}.$$

За законом збереження енергії:

$$U_1 = U_2 + \rho L \cdot \frac{v^2}{2}.$$

Отримаємо:

$$v^2 = \frac{2}{\rho L}(U_1 - U_2) = \frac{2g}{L}\left(\frac{L^2 - a^2 - b^2}{2} + 2\sqrt{3}\, d^2\right).$$

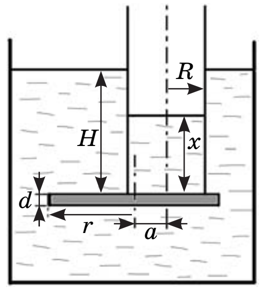
Підставляючи в це рівняння d, отримаємо остаточну відповідь, яку можна записати дещо елегантніше, якщо ввести безрозмірні величини: $\alpha = \dfrac{a}{L}$, $\beta = \dfrac{b}{L}$.

$$v^2 = gL\left(1 - \alpha^2 - \beta^2 + \frac{4(1 - \alpha - \beta)^2}{3\sqrt{3}\,(2N-1)^2}\right).$$

Оскільки $L > a + b \Leftrightarrow 1 > \alpha + \beta$, то v^2, очевидно, додатна.

♦ Задача № 4. «Трубки й пластинки»

Зрозуміло, що якщо в трубці зовсім немає води, то пластина утримується на дні склянки за рахунок сили тиску води під склянкою. Якщо в трубці є вода, то цей тиск почасти компенсується, і якщо вода налита в склянку до рівня $x = H$, то сума всіх сил тиску, які діють



■ Рис. 3

на пластину, дорівнюватиме просто силі Архімеда на глибині H, меншій за силу тяжіння (оскільки $\rho > \rho_0$). Отже, пластина має відвалитися при деякому $x < H$. Умову компенсації сил найзручніше обчислити, виділивши з результуючої сил тиску силу Архімеда. Різниця — шукана сила тиску стовпа рідини в трубці висоти $(H - x)$:

$$\rho g \cdot \pi r^2 d = \rho_0 g \cdot \pi r^2 d - \rho_0 g (H - x)\pi R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H - x = d\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)\frac{r^2}{R^2}.$$

Отже, умова рівноваги:

$$\frac{x}{d} < \frac{H}{d} - \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)\frac{r^2}{R^2}.$$

Пластина, однак, може відвалитися й за менших x, якщо момент сил тиску стане недостатнім для втримання її від обертання навколо правого краю трубки. Для обчислення моментів сили рахуються також точки прикладення сили тяжіння й сили Архімеда — центр мас пластинки, отже, їхній важіль дорівнює $(R + a)$.

Сила тиску стовпа рідини в трубці розподілена за перерізом трубки. Спрямуємо вісь y горизонтально в площині рисунка й розташуємо початок відліку в правому кінці трубки. Подумки «наріжемо» стовп рідини в трубці на тонкі пластинки однакової товщини за віссю y. Для кожної пластинки з координатою y і товщини δy існуватиме така сама пластинка з координатою, симетричною першій відносно осі трубки. Сумарний момент сил тиску цих двох пластинок на металеву пластину в такому разі дорівнюватиме $\delta mg \cdot (y + 2R - y) = 2\delta mgR$, де δm — маса кожної з пластинок. Таким чином, увесь стовп рідини діє на металеву пластину так, ніби точка прикладання сили тиску знаходиться на осі трубки.

Умову компенсації моментів відносно нижнього правого краю трубки запишемо, також виділяючи з результуючої сил тиску силу Архімеда:

$$(\rho - \rho_0) g \cdot \pi r^2 d \cdot (R + a) = \rho_0 g \cdot \pi R^2 (H - x) \cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H - x = d\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)\frac{r^2}{R^2}\left(1 + \frac{a}{R}\right).$$

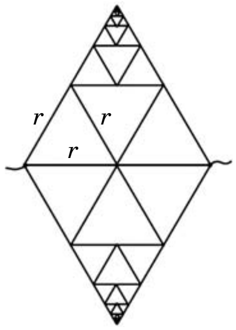
Отже, умова рівноваги:

$$\frac{x}{d} < \frac{H}{d} - \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)\frac{r^2}{R^2}\left(1 + \frac{a}{R}\right).$$

Вона порушується при менших x, ніж умова для сил, а тому й визначає те мінімальне значення x, за якого пластинка відвалюється від дна трубки.

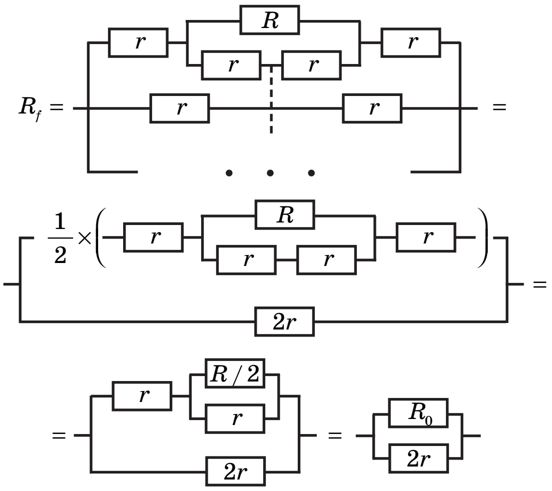
♦ Задача № 5. «Фрактальне коло»

Задачу можна розв'язувати різними способами, але в будь-якому разі для розв'язання потрібні дві ключові ідеї. Перша — це об'єднання/роз'єднання точок з однаковим потенціалом (те саме можна робити, виходячи з міркувань симетрії або роздумуючи про міст, що компенсується), друга — це запис рівняння для опору самоподібної частини кола. Наведемо один із можливих розв'язків.



■ Рис. 4

Нехай $r = \rho a$; позначимо повний опір кола як R_f, а опір верхнього з восьми трикутників, на які ділиться ромб між вершинами при горизонтальній основі,— через R. Тоді R_f записується у вигляді, поданому на рисунку 5.

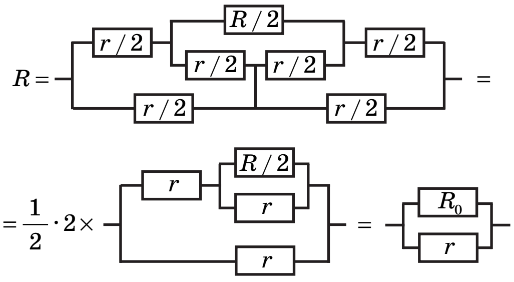


■ Рис. 5

Тут ми роз'єднали дротинки в центральному вузлі (позначений штриховою лінією), з'єднали паралельно верхню половину кола з нижньою і врахували отриманий множник $\frac{1}{2}$, відкинувши половину цієї симетричної частини. Зрештою позначили

$$R_0 = r + \frac{\frac{rR}{2}}{r + \frac{R}{2}}.$$

Рівняння для R отримуємо, записуючи вираз для нього як для опору послідовно й паралельно з'єднаних провідників і враховуючи, що опір такого самого трикутника удвічі менших лінійних розмірів — удвічі менший. Тут ми винесли множник $\frac{1}{2}$, а потім, з'єднавши точки одного потенціалу, розбили коло навпіл. При цьому виділилося підколо R_0, введене раніше (*див. рис. 6*).



■ **Рис. 6**

Вводячи нову змінну $x = \dfrac{r}{R}$, запишемо R_f у вигляді $R_f = \dfrac{2rR}{2r - R} = \dfrac{r}{x - \frac{1}{2}}$. Значення x одержимо з рівняння для R, вибираючи фізично значимий додатний корінь квадратного рівняння:

$$\Rightarrow x^2 - x = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow$$

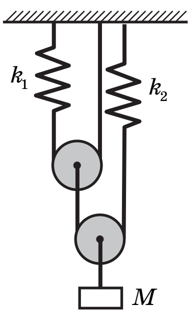
$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Підставляючи його у вираз для R_f, отримаємо результат $R_f = \dfrac{2r}{\sqrt{7}} = \dfrac{2\rho a}{\sqrt{7}}$.

10 КЛАС

♦ Задача № 1

Розглянемо положення рівноваги цієї системи. На нижній блок діє вага вантажу Mg, спрямована вниз, і дві сили натягу нитки T, спрямовані вгору. Оскільки блок перебуває в рівновазі, $T = Mg/2$. Отже, пружина 2 розтягнута на величину $x_2 = Mg/2k_2$. Аналогічно пружина 1 розтягнута із силою $Mg/4$, і її видовження $x_1 = Mg/4k_1$.



■ **Рис. 1**

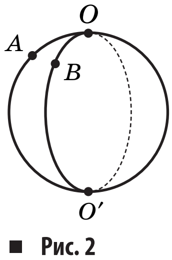
Оскільки пружина 1 видовжилася на x_1, верхній блок опустився на $x_1/2$. Надалі, оскільки верхній блок опустився на $x_1/2$, а пружина 2 видовжилася на x_2, то зміщення нижнього блока $h = (x_1/2 + x_2)/2 = x_1/4 + x_2/2$. Підставляючи вирази для величин $x_{1\,1}$ і x_2, отримаємо шукане зміщення

$$h = Mg/16k_1 + Mg/4k_2.$$

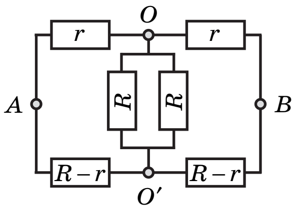
Відповідь: h = 15 см.

♦ Задача № 2

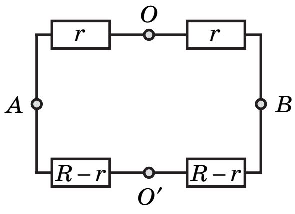
Позначимо опір півкільця величиною $R = \rho\pi L$, а опір дуги довжиною x через $r = \rho x$. Нарисуємо еквівалентну схему (*див. рис. 3*).



■ **Рис. 2**



■ **Рис. 3**



■ **Рис. 4**

Оскільки точки O і O' лежать на осі симетрії схеми, потенціал у них однаковий і струм паралельними опорами R проходити не буде. Це дозволяє прибрати опір R з кола й перерисувати схему в іншому вигляді (*див. рис. 4*). Тепер неважко обчислити її повний опір.

$$R_{AB} = \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2(R - r)}\right)^{-1} = \frac{2r(R - r)}{R} = \frac{2\rho x(\pi L - x)}{\pi L}.$$

Відповідь: $R_{AB} = \dfrac{2\rho x(\pi L - x)}{\pi L}$.

♦ Задача № 3

Спочатку лід, маса якого — m, витісняє обсяг води $V_1 = m/\rho_1$, де ρ_1 — початкова густина води. Після того, як лід масою $m/2$ розтанув, витісняється об'єм води $V_2 = m/(2\rho_2)$, де ρ_2 — кінцева густина води. Об'єм води, яка додалася,— $V' = m/(2\rho)$, де ρ — густина прісної води. Зміна рівня води в посудині

$$\Delta h = \frac{V_2 + V' - V_1}{S} = \frac{m}{S}\left(\frac{1}{2\rho_2} + \frac{1}{2\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right).$$

Кінцева густина води ρ_2 дорівнює відношенню повної маси води $\rho_1 V + m/2$ до повного об'єму $V + m/(2\rho)$, тобто

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V + m/(2\rho_1)}{V + m/(2\rho)},$$

де V = 1 л — початковий об'єм води.

Підставляючи числові значення, одержимо

$$\rho_2 = 1{,}1\ \text{г/см}^3 \text{ і } \Delta h \approx 0{,}85\ \text{см}.$$

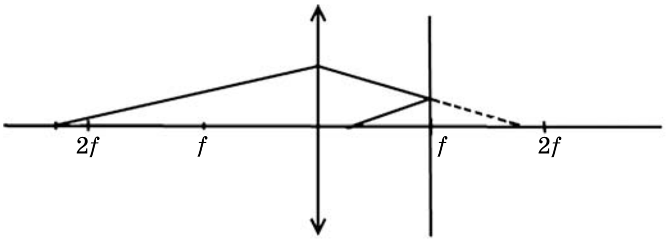
Таким чином, рівень води в посудині підвищився.

Відповідь: рівень води в посудині підвищився на $\Delta h \approx 0{,}85$ см.

♦ Задача № 4

У цій задачі потрібно розглядати два варіанти: $a > 2f$ і $f < a < 2f$.

1) У випадку, коли $a > 2f$, зображення створюватиметься променями, відбитими від дзеркала, і перебуватиме між лінзою й дзеркалом (*див. рис. 5*).

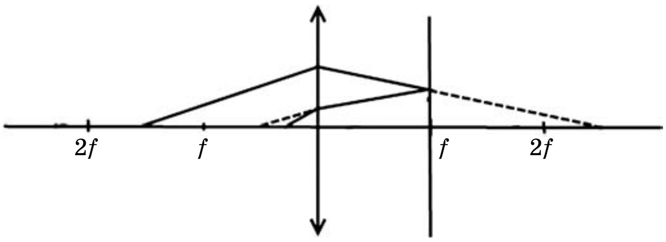


■ **Рис. 5**

Відповідно до формули лінзи $\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f}$ зображення за відсутності дзеркала знаходилося б на відстані $d=\frac{af}{a-f}<2f$ від лінзи. Отже, після відбиття променів від дзеркала зображення знаходитиметься на відстані $d-f<f$ зліва від нього й на відстані $x=f-(d-f)=2f-d$ від лінзи. Підставивши вираз для d, отримаємо відповідь:

$$x=\frac{f(a-2f)}{a-f}.$$

2) У випадку, коли $f<a<2f$, зображення створюватиметься променями, які відбилися від дзеркала, удруге пройшли через лінзу й знаходяться з того самого боку від лінзи, де й предмет. (*див. рис. 6*)



■ **Рис. 6**

Відповідно до формули лінзи $\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f}$ зображення за відсутності дзеркала знаходилося б на відстані $d=\frac{af}{a-f}>2f$ від лінзи. Отже, після відбиття променів від дзеркала зображення знаходитиметься на відстані $d-f>f$ зліва від нього, але це область зліва від лінзи, що вказує на вторинне заломлення променів у лінзі. Без лінзи зображення перебувало б на відстані $x=d-2f$ зліва від лінзи. Запишемо формулу лінзи для другого заломлення: $\frac{1}{-(d-2f)}+\frac{1}{x}=\frac{1}{f}$, звідки, підставивши вираз для d, отримаємо відповідь $x=2f-a$.

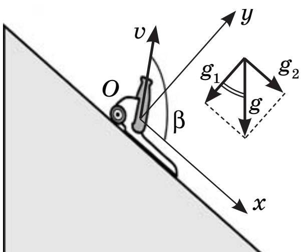
Примітка. У першому випадку може виникнути питання про спостережуваність отриманого зображення. Тоді, якщо спостерігач знаходиться лівіше за предмет, то промені потраплять до нього також після повторного заломлення в лінзі й чисельно відповідь буде такою самою, як у другому випадку. Відмінність полягатиме в тому, що зображення вийде уявним, тоді як у другому випадку — дійсним.

Відповідь: у випадку, коли $f<a<2f$, відстань $x=2f-a$, а для $a>2f$ — $x=\frac{f(a-2f)}{a-f}$.

♦ **Задача № 5**

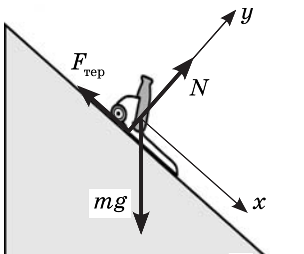
Позначимо кут нахилу площини через α, початкову швидкість ядра — через v, масу гармати — через m.

Введемо систему координат, пов'язану з похилою площиною (*див. рис. 7*), а саме: початок координат O з'єднаємо з вихідним положенням гармати, вісь Ox спрямуємо вздовж похилої площини, а вісь Oy — перпендикулярно до неї.



■ **Рис. 7**

Описуватимемо рух ядра й гармати в цій системі координат. Спочатку розглянемо рух гармати після пострілу. Сили, які діють на гармату, що зісковзує, позначені на рис. 8. Запишемо другий закон Ньютона для гармати в проекціях на осі:



■ **Рис. 8**

$$Ox:\ -F_{тер}+mg\sin\alpha=ma;\qquad Oy:\ N-mg\cos\alpha=0;$$

Оскільки $F_{тер}=\mu N$, то, виразивши N з другого співвідношення й підставивши в перше для прискорення гармати, отримаємо: $a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$.

Розглянемо тепер рух ядра. У вибраній системі координат рух ядра відбувається рівноприскорено вздовж обох осей. З рисунка 8 видно, що проекції прискорення ядра на відповідні осі дорівнюють $g_1=-g\cos\alpha$ і $g_2=g\sin\alpha$. Рівняння, які описують рух ядра, мають вигляд:

$$y(t)=vt\sin\beta+\frac{g_1t^2}{2};\quad x(t)=vt\cos\beta+\frac{g_2t^2}{2}.$$

З першого рівняння знаходимо час польоту ядра за умови $y(T)=0$. Тоді $T=\frac{2v}{g}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$.

У цей момент часу ядро опиниться в точці на похилій площині з координатою

$$x(t)=v\frac{2v}{g}\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\cos\beta+\frac{g_2}{2}\left(\frac{2v}{g}\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)^2,$$

а гармата скотиться вниз на відстань

$$S=\frac{aT^2}{2}=\frac{2(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)v^2\sin^2\beta}{g\cos^2\alpha}.$$

Прирівнюючи $x(T)$ і S, отримуємо

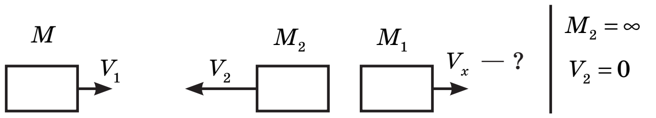
$$-\cos\beta=\mu\sin\beta,$$

звідки знаходимо шуканий кут $\operatorname{ctg}\beta=-\mu$. Відзначимо, що оскільки $\mu>0$, то кут β завжди буде більший за $\pi/2$.

Відповідь: кут вильоту ядра $\beta=\operatorname{arcctg}(-\mu)$.

11 КЛАС

♦ Задача № 1



■ Рис. 1

1) Ступінь руйнування визначаємо кількістю на одиницю маси кінетичної енергії, яка перейшла у внутрішню.

Запишемо закон збереження імпульсу:

$$m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2=(m_1+m_2)\vec{V}.$$

Звідси для величини V маємо:

$$V=\frac{m_1V_1-m_2V_2}{m_1+m_2}.$$

Визначимо зміни кінетичної енергії:

$$\Delta E=\frac{m_1V_1^2}{2}+\frac{m_2V_2^2}{2}-\frac{(m_1+m_2)V^2}{2};$$

$$\Delta E=\frac{m_1V_1^2}{2}+\frac{m_2V_2^2}{2}-\frac{(m_1+m_2)}{2}\left(\frac{m_1V_1-m_2V_2}{m_1+m_2}\right)^2;$$

$$\Delta E=\frac{1}{2(m_1+m_2)}\left[m_1m_2V_1^2+2m_1m_2V_1V_2+m_1m_2V_2^2\right]=$$

$$=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\left[V_1+V_2\right]^2.$$

Питома енергія:

$$\frac{\Delta E}{m_1+m_2}=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)^2}\left[V_1+V_2\right]^2.$$

2) У другому випадку питома енергія дорівнює всій кінетичній енергії автомобіля:

$$\frac{\Delta E}{m_1}=\frac{m_1V_x^2}{2m_1}=\frac{V_x^2}{2},$$

тобто

$$\frac{V_x^2}{2}=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)^2}\left[V_1+V_2\right]^2.$$

3) В окремому випадку $V_x=V_1=V_2$.

♦ Задача № 2

1) Оцінимо, скільки води потрібно випарувати, щоб охолодити воду, яка залишилася, на $20\,^\circ\mathrm{C}$, вважаючи, що охолоджується незмінна маса води:

$$C\Delta TM\approx\lambda\Delta M_1\Rightarrow\frac{\Delta M_1}{M}=\frac{C\Delta T}{\lambda}=\frac{20\cdot4{,}1868}{2250}=0{,}037.$$

Ця величина достатньо мала, тому припущення про охолодження незмінної маси води досить правомірне.

2) Обчислимо, скільки води потрібно випарувати при $0\,^\circ\mathrm{C}$, щоб заморозити масу води, яка залишилася:

$$q(M-\Delta M_2)=\lambda\Delta M_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta M_2}{M}=\frac{q}{q+\lambda}=\frac{333{,}55}{2250+333{,}5}=0{,}129.$$

Ця величина не дуже мала, тому обчислюємо за умови, що замерзає менша маса, ніж початкова.

3) У результаті доведеться відкачати масу води

$$\Delta M=M\left(\frac{C\Delta T}{\lambda}+\frac{q}{q+\lambda}\right).$$

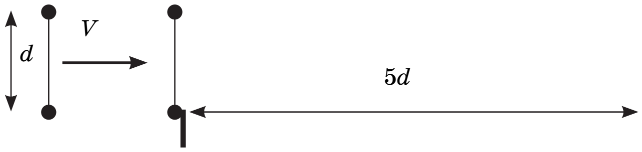
Для цього знадобиться такий час:

$$t=\frac{\Delta M}{v}=\frac{M}{v}\left(\frac{C\Delta T}{\lambda}+\frac{q}{q+\lambda}\right).$$

Обчислимо його:

$$t=1\cdot\frac{0{,}037+0{,}129}{10^{-3}}=\frac{0{,}166}{10^{-3}}=166\ \text{секунд}.$$

♦ Задача № 3



■ Рис. 2

1) Пружне зіткнення

Одразу після удару нижня куля отримує швидкість V. Корабель починає обертатися з лінійною швидкістю обертання куль, яка дорівнює V. Центр тяжіння буде нерухомим. Через півоберта відбудеться друге зіткнення, і корабель знову почне рухатися поступально зі швидкістю V.

$$t=\frac{\pi d}{2V}+\frac{5d}{V}.$$

2) Непружне зіткнення

Після нього нижня куля зупиняється. Верхня продовжує рух зі швидкістю V, а центр тяжіння рухається зі швидкістю $V/2$.

Отже,

$$t=\frac{5d}{V/2}.$$

♦ Задача № 4

Швидкість у момент співудару:

$$\upsilon=\sqrt{2g(h-x)}\ .$$

Час руху за вертикаллю від точки удару:

$$t=\sqrt{x/g}\ .$$

Відстань за горизонталлю, пройдена після удару:

$$l=\upsilon t.$$

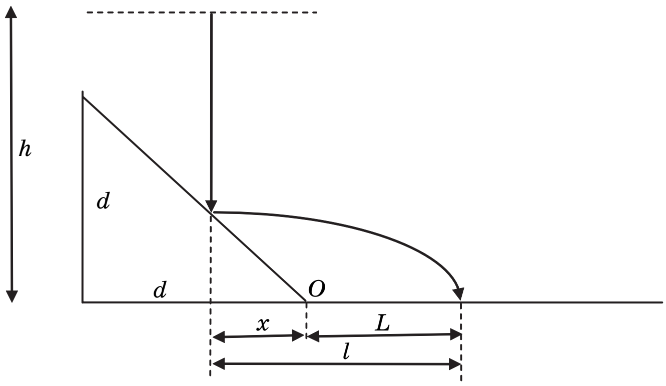
Відстань від точки падіння до клину (до точки O):

$$L=l-x=\sqrt{2g(h-x)2x/g}-x=2\sqrt{x(h-x)}-x.$$

Максимум цієї функції знаходиться в точці $x_{\max}=h\dfrac{1-1/\sqrt{5}}{2}$ й дорівнює $L_{\max}=h\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

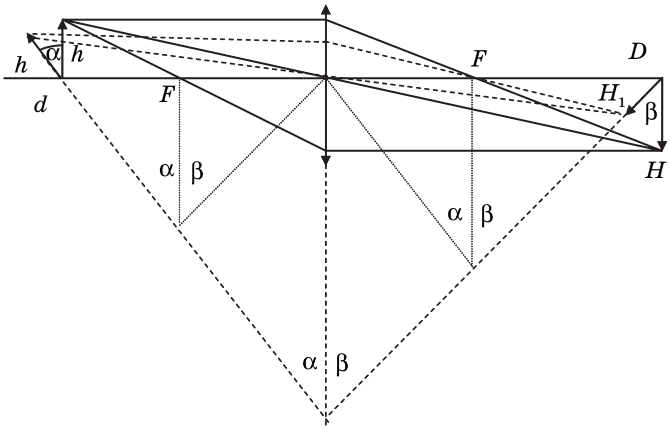
Висота, з якої повинні падати кульки, щоб жодна з них двічі не потрапила на клин, визначається зі співвідношення:

$$L(x=d)=2\sqrt{d(h-d)}-d=0\ \Rightarrow\ h=\frac{5}{4}d.$$



■ **Рис. 3**

♦ Задача № 5



■ **Рис. 4**

До повороту

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{D}.$$

Після повороту

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d+h\sin\alpha}+\frac{1}{D-H_1\sin\beta}.$$

Звідси

$$D-H_1\sin\beta=\left[\frac{1}{F}-\frac{1}{d+h\sin\alpha}\right]^{-1}$$

$$\text{і}\ \ H_1\sin\beta=D-\left[\frac{1}{F}-\frac{1}{d+h\sin\alpha}\right]^{-1}.$$

Для вертикальних проекцій маємо:

$$\frac{h\cos\alpha}{d+h\sin\alpha}=\frac{H_1\cos\beta}{D-H_1\sin\beta}.$$

Звідси

$$H_1\cos\beta=\left(D-H_1\sin\beta\right)\frac{h\cos\alpha}{d+h\sin\alpha}.$$

Для $\operatorname{ctg}\beta$ маємо:

$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{\left(D-H_1\sin\beta\right)\dfrac{h\cos\alpha}{d+h\sin\alpha}}{D-\left[\dfrac{1}{F}-\dfrac{1}{d+h\sin\alpha}\right]^{-1}}=$$

$$=\frac{\left[\dfrac{1}{F}-\dfrac{1}{d+h\sin\alpha}\right]^{-1}\dfrac{h\cos\alpha}{d+h\sin\alpha}}{D-\left[\dfrac{1}{F}-\dfrac{1}{d+h\sin\alpha}\right]^{-1}}=$$

$$=\frac{\dfrac{h\cos\alpha}{d+h\sin\alpha}}{D\left[\dfrac{1}{F}-\dfrac{1}{d+h\sin\alpha}\right]-1}=$$

$$=\frac{1}{D}\frac{h\cos\alpha}{h\sin\alpha}d.$$

Задачі запропонували

8 класс: *Підготував Гапон Олександр Вікторович (старший викладач ХНУ імені В. Н. Каразіна).*

9 класс: *Підготував Танатаров Ігор Володимирович (доцент ХНУ імені В. Н. Каразіна, науковий співробітник ННЦ ХФТІ).*

10 класс: *Гах Андрій Генадійович (доцент ХНУ імені В. Н. Каразіна).*

11 класс: *Немченко Костянтин Едуардович (професор, декан фізико-енергетичного факультету ХНУ імені В. Н. Каразіна).*