БІБЛІОТЕКА світ фізики

Обласні олімпіади з фізики

Задачі та розв'язки

Євро Світ

Серія

БІБЛІОТЕКА „СВІТ ФІЗИКИ"

Володимир Алексейчук, Олександр Гальчинський,
Галина Шопа

Обласні олімпіади з фізики

Задачі та розв'язки

Львів
Євросвіт
2000

ББК 22.3
Г65

Серія: **БІБЛІОТЕКА „СВІТ ФІЗИКИ"**
ISBN 966-7343-13-8

В.Алексейчук, О.Гальчинський, Г.Шопа. Обласні олімпіади з фізики. Задачі та розв'язки. – Львів: Євросвіт, 2000. – 168 с.

ISBN 966-7343-09-X

Книга містить умови та розв'язки III (обласного) етапу Всеукраїнських олімпіад з фізики (1993-2000). У ній наведено 160 задач, та їхні розв'язки, що містять рисунки, графіки, коментарі. В додатках наведені методи наближеного обчислення фізичних величин, математичні формули, таблиці фізичних величин тощо.

Книга рекомендується для вдосконалення навичок самостійного розв'язування задач з фізики, підготовки до олімпіад та інших творчих змагань школярів.

Для вчителів фізики та школярів.

Технічний редактор
Віталій Лесівців

Літературний редактор
Мирослава Прихода

Художній редактор
Володимир Гавло

Здано в набір 5.05.2000. Підписано до друку 25.08.2000. Формат 60x84/16. Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 9,77. Умовн. фарбовідб. 9,98. Зам. 1046. Наклад 1000.

СП „Євросвіт"
79005 м. Львів, а/с 6700

Віддруковано з готових діапозитивів в НВМ Поліграфічного технікуму УАД
79008, м. Львів, вул. Винниченка, 12

ISBN 966-7343-09-X

Від видавництва

З 1997 року виходить всеукраїнський науково-популярний журнал „Світ фізики". Журнал знайомить читачів із сучасними досягненнями фізичної науки, висвітлює маловідомі сторінки української фізики, публікує задачі та розв'язки олімпіад з фізики. Однак, періодичні видання не можуть детально висвітлити всі аспекти фізичної науки.

Видавництво "Євросвіт" започатковує серію книг „Бібліотека „Світ фізики". В ній видаватимуться книги з фізики науково-популярного та навчального змісту для школярів, студентів, учителів, всіх, хто цікавиться фізикою.

Книга „Обласні олімпіади з фізики. Задачі та розв'язки" містить завдання III (обласного) етапу Всеукраїнських олімпіад з фізики, запропонованих школярам за останні 8 років (1993-2000). Вона складається з двох розділів та додатків. Перший розділ містить умови реальних завдань обласних олімпіад для 8-11 класів. Для зручності користування книгою авторами подано завдання для окремих класів і структуровані по роках. У цій же послідовності подаються їхні розв'язки у другому розділі. У ній використані матеріали Львівських обласних олімпіад з фізики.

Сподіваємось, що книга „Обласні олімпіади з фізики. Задачі та розв'язки" допоможе школярам оволодіти мистецтвом розв'язування задач і сприятиме їхнім подальшим успіхам.

ЗМІСТ

УМОВИ ЗАДАЧ III (ОБЛАСНОГО) ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З ФІЗИКИ

8-й клас

1993

1 (1). Команді з двох осіб потрібно подолати відстань між пунктами *A* і *B* (20 км). Команда має один велосипед, на якому зі швидкістю 20 км/год може їхати лише одна людина. Швидкість пішохода 6 км/год. За який мінімальний час і як команда прибуде в пункт *B*. Залік часу ведеться за останім членом команди.

2 (2). У циліндричну бочку висотою 2 м налито 800 л води. Діаметр бочки – 1 м. У верхній кришці є невеликий отвір, через який можна просунути всередину шланг. Чи можна через цей шланг висмоктати воду з бочки, якщо зі висмоктуванням створюється розрідження з тиском $5\cdot10^4$ Па? Відповідь обгрунтуйте.

3 (3). В одне з колін U-подібної трубки з водою влили гас, після чого різниця рівнів у трубці дорівнювала 3 см. У друге коліно доливали бензин доти, поки рівні рідини в обох трубках не стали рівними. Визначіть висоту стовпчика бензину.

4 (4). У посудині нагрівають 1 л води і 50 г льоду. Початкова температура води і льоду 0 °C. Через скільки часу вода закипить, якщо потужність нагрівача 500 Вт, а його теплова віддача 0,60? Теплоємність посудини і нагрівача не враховуйте.

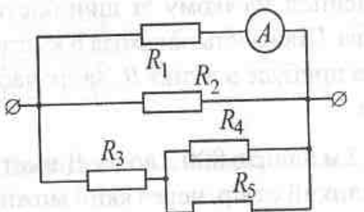
5 (5). Два однакові кубики з ребром 3 см один з міді, а інший з алюмінію, обидва при кімнатній температурі (20 °C) зістиковують один з одним. Яку кількість тепла і якому кубику передано при цьому?

1994

1 (6). Спортсмени біжать з однаковими швидкостями v колоною довжини l_0. Назустріч їм біжить тренер з швидкістю u ($u < v$). Спортсмен, порівнявшись з тренером, біжить назад з тією ж швидкістю v. Яка буде довжина колони, коли всі спортсмени розвернуться?

2 (7). З дна озера намагаються підняти затонулий сталевий якір масою 780 кг за допомогою пінопластової кулі, яку прикріплюють до якоря легким тросом. При якому мінімальному об'ємі кулі це можливо? Густини сталі, води і пінопласту дорівнюють відповідно 7800, 1000 і 150 кг/м^3.

3 (8).



Амперметр, увімкнутий в ділянку кола (див. рис.), показує силу струму $I_1 = 0{,}5$ А. Знайдіть силу струму через резистор R_4. Опори резисторів $R_1 = R_4 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = R_5 = 1$ Ом.

Опором амперметра знехтуйте.

4 (9). Деяка кількість води нагрівається електронагрівником потужністю $P = 500$ Вт. З вмиканням нагрівника на час $t_1 = 2$ хв температура води підвищилась на $T = 1$ К, а з його вимкненням – знизилась за час $t_1 = 1$ хв на ту ж величину T. Яка маса води нагрівається, якщо втрати кількості теплоти за рахунок теплопередачі навколишньому повітрю пропорційні часові? Питома теплоємність води $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/кг·К.

5 (10). З першого поверху будинку на другий прокладено багатожильний кабель. Жили в ньому ізольовані одна від одної і колір ізоляції у всіх жил однаковий. Визначіть номери кінців кабелю на другому поверсі будинку за допомогою батарейки, лампочки і невеликого шматка дроту? Бажано, звичайно, виконати при цьому найменшу кількість операцій.

1995

1 (11). Радіоаматорові потрібний резистор опором 70 кОм. У нього знайшлись три резистори опорами 100 кОм, 50 кОм і 25 кОм. Чи може він скласти з них потрібний опір? Якщо може, то як? Накресліть схему.

2 (12). Мініатюрний калориметр масою 0,22 г з питомою теплоємністю матеріалу $c = 2{,}8$ кДж/кг·°С дає змогу вимірювати зміни температури не менші за 0,01 °С. У калориметр з висоти 4,2 м падає крапля води. При якому мінімальному об'ємі краплі термометр має змогу зафіксувати її потрапляння в калориметр?

3 (13). Спостерігаючи за потягом, що рівномірно рухається, хлопчик встановив, що повз початок залізничної платформи потяг рухався 24 секунди, повз всю платформу пройшов за 40 секунд. Вимірявши довжину платформи, яка дорівнювала 140 м, хлопчик визначив швидкість і довжину потяга. Які числові значення цих фізичних величин хлопчик одержав?

4 (14). У рідині з постійною швидкістю повільно опускається кулька радіуса R і маси m. Яку масу мала б кулька того ж радіуса, щоб вона піднімалась з тією ж швидкістю, з якою опускається перша кулька? Густина рідини ρ, сила опору пропорційна швидкості.

5 (15). Для відкачування води з підвалу застували насос потужністю 330 Вт. Ширина підвалу 6 м, довжина 24 м, висота 4 м. Спочатку рівень води в підвалі знаходився на рівні землі. За який час можна відкачати воду? Вважайте, що в процесі відкачування потужність насоса не змінюється.

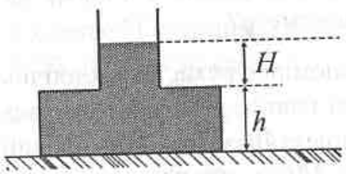
1996

1 (16). У ванні потрібно приготувати 320 л води температурою 36 °С. Температура гарячої води – 78 °С, а холодної – 8 °С. Скільки гарячої й холодної води потрібно для цього?

2 (17). Відстань між кінцевими зупинками трамваю дорівнює 5 км. На маршруті рівномірно курсують 10 трамваїв. Пасажир трамваю визначив, що зустрічні трамваї проїжджають повз нього через кожні дві хвилини. Визначіть швидкість трамваю.

3 (18). Тіло плаває на поверхні ртуті так, що в неї занурено 0,25 його об'єму. Яка частина тіла буде занурена в ртуть, якщо зверх неї налити шар води, який повністю покриє тіло?

4 (19).



До якої температури потрібно охолодити кусок алюмінію, щоб після опускання його у воду з температурою 0 °С він піднявся з дна завдяки обмерзанню льодом?

5 (20). У дні циліндричної посудини просвердлили дірку, площа якої S_0, і вставили в цю дірку трубку. Посудину поставили на рівну поверхню дном догори і в трубку налили води. До якої максимальної висоти можна наливати воду, щоб вона не витікала? Маса посудини з трубкою m, висота її h, а площа дна S.

1997

1 (21). З якою швидкістю, відносно Землі, рухаються верхні та нижні ланки гусениці трактора, якщо його швидкість $v = 10$ км/год?

2 (22). У U-подібну трубку з площами колін S_1 та S_2 налили воду. Як зміниться рівень води в U-подібній трубці, якщо в одне коліно кинули кусок дерева масою m, а в інше коліно – кусок пінопласту такої ж маси?

3 (23). Автомобіль, який має у баці 2 л бензину, проїжджає відстань S. Піднімаючись на гору висотою $h = 100$ м, на шлях, довжина якого дорівнює 0,8 S, він витрачає таку ж кількість бензину. ККД двигуна $\eta = 30$ %, питома теплота згоряння бензину дорівнює $q = 10^6$ Дж/кг, густина бензину – $\rho = 710$ кг/м^3. Визначіть масу автомобіля.

4 (24). За допомогою нагрівача потужністю 500 Вт нагрівають воду в посудині за 2 хв на 1 К. Ця ж вода в посудині без нагрівача охолоджується за 1 хв також на 1 К. Знайдіть масу води в посудині, якщо втрати кількості теплоти за рахунок теплопередачі навколишньому середовищу пропорційні часові? Питома теплоємність води $c = 4200$ Дж/кг·°С.

5 (25). Залізну кульку, густина якої дорівнює $\rho_к = 7,8$ г/см^3, занурили на $h = 10$ см у ртуть. На яку максимальну висоту підскочить ця кулька над рівнем ртуті, якщо її відпустити? Густина ртуті – $\rho_р = 13,6$ г/см^3, опором повітря та ртуті знехтуйте.

1998

1 (26). У калориметр налили 0,5 л води при температурі 20 °С і помістили 1 кг льоду при температурі – 40 °С. Скільки льоду залишиться після завершення процесу теплообміну?

2 (27). По паралельних коліях назустріч один одному рухаються два потяги: пасажирський довжиною 300 м зі швидкістю 60 км/год і вантажний зі швидкістю 40 км/год. Машиніст пасажирського потяга виміряв, що вантажний потяг проїжджає повз нього за 21,6 с. Визначіть відстань від точки зустрічі потягів до точки розходження останніх вагонів.

3 (28). Два циліндри з'єднані внизу трубкою. В один з них налили води, а в інший – нафти. При цьому різниця між рівнями нафти і води була $h = 5$ см. Переріз циліндра з нафтою дорівнював $S = 80$ см^2. У циліндр з нафтою поклали невагомий поршень і деякий вантаж на поршень. При якій масі вантажу рівні води і нафти будуть однакові? Під час експерименту нафта не перетікає в інший циліндр.

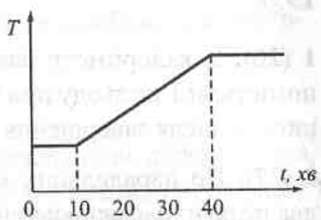
4 (29). Автомобіль, маючи 1 л палива, може проїхати по горизонтальній дорозі 6 км. Яку відстань він зможе проїхати на цьому ж запасі палива, піднімаючись вгору по дорозі з ухилом 10 м на 1 км шляху? Спускаючись вниз за тих самих умов? Сила опору у всіх випадках дорівнює 2 % від ваги автомобіля.

5 (30). Циліндричну посудину кладуть на воду в одному випадку вниз дном, в іншому – догори дном. В обох випадках посудина плаває. На посудину кладуть вантаж. У якому з цих випадків максимальний вантаж, при якому посудина ще плаває, більший? Відповідь поясніть.

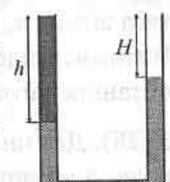
1999

1 (31). По колу стадіона бігають назустріч один одному двоє хлопців. Швидкість одного з них у k разів більша від швидкості другого. Щоразу хлопці зустрічаються на відстані L від попереднього місця зустрічі. Визначіть довжину стадіона.

2 (32). У калориметр помістили суміш води й льоду і рівномірно нагрівають її. Графік залежності температури в калориметрі від часу зображено на рисунку. Визначіть початкове співвідношення мас води і льоду. Коли температура знову почне змінюватись?



3 (33). У U-подібну трубку постійного перерізу налили води. Після цього в ліве коліно налили рідини з меншою густиною по вінця трубки, як зображено на рисунку. В праве коліно кинули кусок дерева масою m. Визначіть об'єм рідини, яка виллється.



4 (34). Водолаз знайшов золотий скарб і зважив його відразу під водою, користуючись терезами зі сталевими гирями. Він важив 643 г. Однак, коли водолаз продавав свій скарб, то його звинуватили в брехні, заявивши, що золота набагато менше. Скільки золота було насправді?

5 (35). Автомобіль, маса якого 1,5 т, перевозить по горизонтальній дорозі 500 кг вантажу, витрачаючи по 15 г бензину щохвилини. Визначіть швидкість автомобіля, якщо коефіцієнт корисної дії двигуна 30 %, а коефіцієнт опору – 0,01.

2000

1 (36). Щоб підтримувати в кімнаті температуру 20 °С при температурі на вулиці мінус 10 °С доводиться щодня спалювати 0,1 м^3 сухих дров. Скільки дров доведеться спалювати щодня для підтримання в кімнаті ту ж саму температури, якщо температура на вулиці знизиться до мінус 20 °С?

2 (37). Мачуха змішала в одному мішку кукурудзу та овес. Допоможіть Попелюшці визначити фізичними методами процентний вміст (по об'єму) кукурудзи та вівса в мішку. Що для цього Вам потрібно?

3 (38). Теплохід на підводних крилах рухався по Дніпру з пункту A до пункту B, потім повернувся з B до пункту A. На його шляху було водосховище. Швидкість течії Дніпра v_0, швидкість течії у водосховищі мізерно мала, швидкість теплохода у стоячій воді v_1. Більше чи менше часу затратив би на ту ж саму дорогу теплохід, коли б водосховища не було, і річка скрізь текла б зі швидкістю v_0?

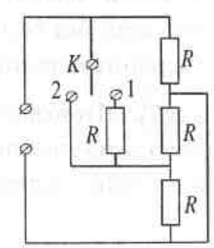
4 (39). Батискаф масою $m = 2000$ кг, об'ємом $V = = 1$ м^3 занурили в море на глибину $h_0 = 10$ м. Яку роботу потрібно виконати, щоб підняти батискаф на висоту $H = 5$ м над поверхнею води? Чи дорівнює виконана при цьому робота зміні потенціальної енергії батискафа? Густина води 1000 кг/м^3.

5 (40). Як можна надати n пустотілим несуцільним тілам, які мають різну форму, однакового заряду?

9 клас

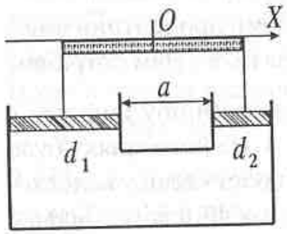
1993

1 (41). Електропіч, що складається із однакових нагрівальних спіралей з опором R кожна, вмикається у мережу за схемою, зображеною на рисунку. Знайдіть у скільки разів зросте потужність електропечі при переведенні перемикача K із положення 1 у положення 2 .



2 (42). Спостерігач, який стояв поблизу початку першого вагона, помітив, що потяг рушив з місця і почав рухатися рівноприскорено. Передостанній вагон пройшов повз нього за час $t_1 = 3$ с, а останній – за $t_2 = 2{,}9$ с. Знайдіть час t проходження всього потяга.

3 (43). У дві циліндричні сполучені посудини налита рідина (див. рис.). На поверхнях рідини у посудинах встановлені поршні однакової товщини із однакового матеріалу. До поршнів на вертикальних стрижнях прикріплений невагомий брусок. Діаметри посудин дорівнюють $d_1 = 80$ см і $d_2 = 60$ см, а проміжок між ними $a = 30$ см. На якій віддалі і з якої сторони від середини бруска потрібно закріпити додатковий вантаж, щоб рівновага бруска не порушилась?



4 (44). П'ять однакових за масою $m = 2$ г пружинок складають ланцюжок, який підвісили за один кінець. На скільки витягнеться ланцюжок, якщо жорсткість пружинки дорівнюватиме $k = 19{,}6$ Н/м?

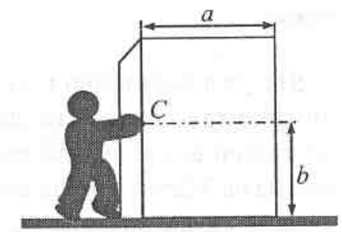
5 (45). Лазер, що має коефіцієнт корисної дії $\eta = 80$ %, випромінює світлові імпульси з тривалістю $t_0 = 0{,}1$ мкс і частотою повторювання $f = 1$ кГц. Для водяного охолодження лазера використовували насос з продуктивністю $k = 3$ л/хв. Температура води на вході лазера $t_1 = 20$ °С, а на його виході – $t_2 = 25$ °С. Знайдіть потужність лазерного імпульсу.

1994

1 (46). Штучний супутник для телезв'язку запустили в площині земного екватора так, що він увесь час знаходиться в зеніті однієї й тієї ж точки Земної кулі. У скільки разів радіус r орбіти супутника більший від радіуса Землі $R_З = 6400$ км? Вважайте відомим прискорення вільного падіння біля поверхні Землі $g = 9{,}8$ м/с^2.

2 (47). Штовхаючи шафу в горизонтальному напрямку, школяр встановив, що вона починає перекидатися, якщо зусилля прикласти вище від точки C (див. рис.). Якщо ж прикласти зусилля нижче від цієї

точки, то шафа починає ковзати по підлозі. Визначіть коефіцієнт тертя між підлогою і шафою, знаючи розміри a і b. Центр мас шафи знаходиться в її геометричному центрі.



3 (48). Опір резистора вимірюють, скориставшись двома електричними колами (див. рис.). В обох випадках на клеми C і D подають однакову напругу. В першому випадку (рис. 1.) вольтметр показав напругу $U_1 = 190$ В, а амперметр – силу струму $I_1 = 1{,}9$ А; у іншому випадку (рис. 2.) покази цих же вольтметра й амперметра відповідно були $U_2 = 170$ В і $I_2 = 2$ А. Скориставшись результатами вимірювань за обома схемами, визначіть опір R резистора.

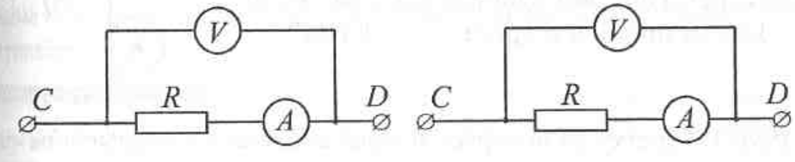
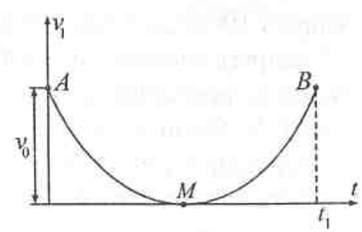


Рис. 1. Рис. 2.

4 (49). Деяка кількість води нагрівається електронагрівником потужністю $P = 500$ Вт. При вмиканні нагрівника на час $t_1 = 2$ хв температура води підвищилась на $T = 1$ К, а при його вимиканні – знизилась за час $t_2 = 1$ хв на ту ж величину T. Яка маса води нагрівається, якщо втрати теплоти за рахунок її передавання навколишньому середовищу пропорційна часу? Питома теплоємність води $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/кг·К.

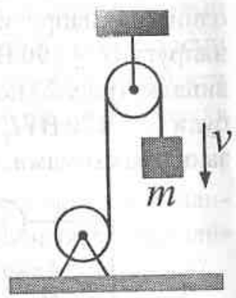
5 (50). Залежність модуля швидкості v_1 першого тіла від часу t зображена дугою півкола AMB (див. рис.). За час t_1 тіло пройшло таку ж відстань, як і друге тіло, яке рухалось з постійною швидкістю $v_2 = 50$ м/с. Визначіть початкову швидкість v_0 першого тіла.



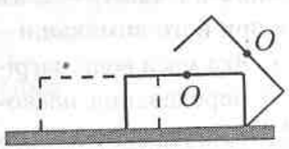
1995

1 (51). Два автомобілі їдуть поряд по шосе зі швидкістю v. Один з них збільшує швидкість удвічі. В результаті спостерігач, який стоїть на узбіччі шосе, вважає що кінетична енергія першого автомобіля зросла на $3/2mv^2$, а водій автомобіля, який відстав, переконаний, що енергія зросла лише на $1/2mv^2$. Розсудіть їх: адже не може бути так, щоб через зміну системи відліку паливо почало горіти втричі „гірше" (а тим паче, втричі „краще").

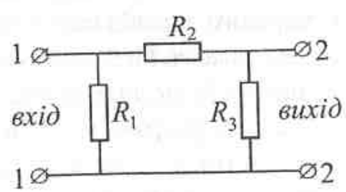
2 (52). Вантаж масою 10^3 кг опускається за допомогою лебідки (див. рис.) з постійною швидкістю 4 м/с. Масою троса і тертям знехтуйте. Якою буде максимальна сила натягу троса при раптовій зупинці лебідки, якщо коефіцієнт пружності троса $k = 5 \cdot 10^7$ Н/м?



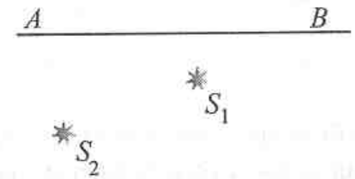
3 (53). Табуретку на чотирьох ніжках висотою a з квадратним сидінням, сторона якого дорівнює $2a$, нахиляють так, що вона спирається на підлогу двома ніжками (див. рис.), і відпускають, після чого вона падає на всі чотири ніжки. Оцініть, на яку відстань вона пересунеться по підлозі, якщо коефіцієнт тертя ковзання ніжок по підлозі k. Удар по підлозі абсолютно непружний. Вважайте, що вся маса табуретки зосереджена в центрі мас O сидіння.



4 (54). Якщо на вхід кола 1-1 подати напругу 100 В (див. рис.), то на виході 2-2 напруга дорівнюватиме 40 В. При цьому по резистору R_2 йде струм силою 1 А. Якщо ж на вихід кола 2-2 подати напругу 60 В, то на вході 1-1 напруга дорівнюватиме 15 В. Визначіть опори резисторів.



5 (55). На рис. зображено положення оптичної вісі AB лінзи, джерела світла S_1 і його зображення S_2. Знайдіть побудовою положення центра лінзи та її фокусів.

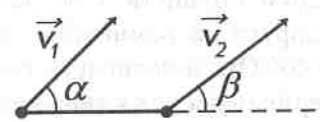


1996

1 (56). Людина, маса якої m, тримає в руках вантаж масою m_1 і стрибає під кутом α до горизонту зі швидкістю v. Досягнувши найвищої точки стрибка, вона кидає вантаж горизонтально в зворотньому напрямку зі швидкістю v_1 відносно Землі. Визначіть довжину стрибка.

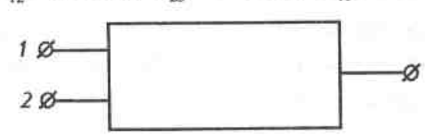
2 (57). Маємо у відповідному об'ємі V дві речовини з густинами ρ_1 і ρ_2. Маса всієї суміші дорівнює m. Визначіть процентне співвідношення речовини у суміші.

3 (58). Дві кульки з масами m_1 та m_2 з'єднані нерозтяжним невагомим стрижнем. У початковий момент біля поверхні Землі кулькам надають швидкості v_1 і v_2 під кутами α і β до горизонту. Яке співвідношення в цей момент між кутами? На яку максимальну висоту підніметься центр мас системи?



4 (59). У „чорній скриньці" змонтовано електричну схему, що складається з трьох опорів. Запропонуйте варіанти схеми й розрахуйте значення опорів, якщо відомо:

$$R_{12} = 3/2 \text{ Ом}; \; R_{23} = 5/6 \text{ Ом}; \; R_{13} = 4/3 \text{ Ом}.$$

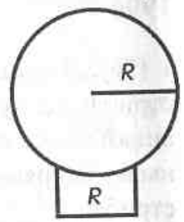


5 (60). Хлопчик масою m з'їжджає на санках по гвинтовій циліндричній гірці, радіус витка якої R, а віддаль між сусідніми витками H. Визначіть силу тиску на гірку після проходження n витків. Тертям і масою санок знехтуйте.

1997

1 (61). Пасажир прибігає на перон у момент, коли повз нього проходить передостанній вагон потягу. Визначіть, на скільки запізнився пасажир, якщо передостанній вагон проїхав повз нього за час t_1, а останній – за час t_2.

2 (62). На тонкостінній підставці стоїть цистерна. При якому мінімальному прискоренні a цистерна впаде із підставки, якщо відстань між стінками підставки дорівнює радіусові цистерни.



3 (63). Температура води у посудині вимірюється за допомогою термоопору, що послідовно приєднаний до ще одного. Система під'єднана до джерела з $U = 20$ В. У колі підтримують постійний струм з точністю 1 % і за допомогою вольтметра вимірюють спад напруги на термоопорі. Із замерзанням води термоопір мав $R = 400$ Ом, а вольтметр показував напругу 0,4 В. Яким буде опір термоопора при кипінні води?

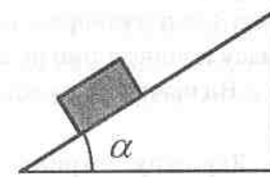
4 (64). Для того, щоб при плаванні у гліцерині об'єм зануреної частини дерев'яного бруска дорівнював об'єму зануреної частини при плаванні його у воді, на брусок додатково навантажили 13 Н. Визначіть вагу бруска. (Густина гліцерину – 1,26 г/см³).

5 (65). У посудині Дюара $V_1 = 0{,}5$ л рідкого азоту при температурі $T_1 = 78$ К випаровується за час $t_1 = 10$ год. За який час t_2 у цій посудині розтане $m_2 = 100$ г льоду, якщо температура навколишнього середовища $T = 293$ К? Густина рідкого азоту дорівнює $\rho_1 = 790$ кг/м³, питома теплота випаровування $r_1 = 1{,}78 \cdot 10^5$ Дж/кг, питома теплота плавлення льоду $\rho_2 = 3{,}34 \cdot 10^5$ Дж/кг. Швидкість підведення теплоти вважайте пропорційною різниці температур ззовні і всередині посудини.

1998

1 (66). Під яким найменшим кутом до горизонту слід кинути м'яч, щоб він пролетів скрізь баскетбольне кільце зверху, не вдарившись об нього. Радіус м'яча r, радіус кільця $R = 2r$, висота кільця над підлогою $H = 3$ м. Баскетболіст кидає м'яч з висоти $h = 2$ м. Віддаль по горизонталі від баскетболіста до кільця $l = 5$ м. (Вважайте: $\sqrt{3} = 1{,}8$).

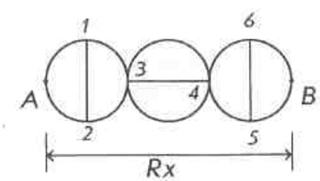
2 (67). На похилій площині, що утворює з горизонтальною площиною кут $a = 30°$, лежить брусок (див. рис.). У брусок потрапляє куля і застрягає в ньому, після цього брусок починає ковзати по похилій площині з початковою швидкістю $v = 280$ м/с, паралельно похилій площині. Визначіть повний час руху бруска? Коефіцієнт тертя між похилою площиною та бруском $\mu = 0{,}7$.



3 (68). Маса зваженого на терезах у повітрі тіла дорівнювала m. Якою є справжня маса тіла, якщо густина тіла – ρ_1, важків – ρ_2, і повітря – ρ_3?

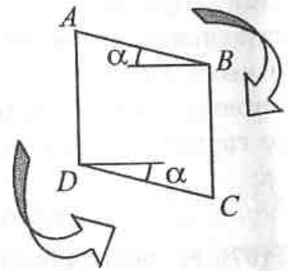
4 (69). Дзеркало, поперечний переріз якого є півколом, помістили в широкий пучок світла, паралельний оптичній вісі дзеркала. Знайдіть найбільший кут розходження променів при відбиванні світла від дзеркала.

5 (70). З дротини опором $R = 4{,}14$ Ом виготовили три однакових кільця з діаметральними перемичками. Кільця з'єднані між собою, як зображено на рисунку. Визначіть опір такої системи.



1999

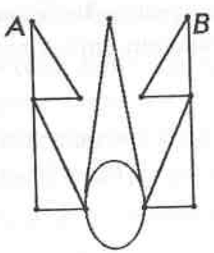
1 (71). Два саночники змагаються, з'їжджаючи з гори різними маршрутами (див. рис.). Відрізки траси $AB = BC = AD = DC = L$. Причому BC і AD – вертикальні, а AB і DC нахилені під кутом $\alpha \neq 0$ до горизонту. Який із спортсменів переможе?



2 (72). З гармати вистрілюють ядро масою M, що розривається на поверхні Землі й утворює ямку радіусом R. Уламки ядра мають однакову масу й рівномірно розлітаються в усі боки з однаковою швидкістю v. Визначіть масу всіх уламків, що випали поза ямкою.

3 (73). Яку силу потрібно прикласти людині, щоб пересунути на інше місце вантаж, якщо коефіцієнт тертя людини об підлогу і вантажу об підлогу однаковий і дорівнює $\mu = 0{,}866$? Маса людини $m = 100$ кг, маса вантажу $M = 300$ кг.

4 (74).



Розрахуйте опір R_{AB} фігури, скрученої із дроту за умови, що опір окремих ділянок дроту між з'єднанням дорівнює R.

5 (75). Скільки своїх зображень можна побачити, якщо стати перед двома плоскими дзеркалами, які розташовані під гострим кутом одне до одного?

2000

1 (76). Пасажир стояв біля початку вагона з порядковим номером $k = 5$. Коли потяг зрушив з місця, виявилось, що вагон з номером $m = 20$ рухався повз пасажира упродовж $t = 10$ с. Скільки часу рухається повз пасажира вагон з номером $n = 29$? Рух потяга вважайте рівноприскореним, довжину вагонів однаковою, пасажира нерухомим відносно платформи.

2 (77). По коловій орбіті навколо Землі поблизу її поверхні рухається космічна станція. Із станції у відкритий космос вийшов космонавт, прив'язаний до станції шнуром завдовжки $L = 63$ м. При якому розміщенні космонавта, станції й Землі натяг шнура буде найбільшим? Визначіть найбільшу силу натягу шнура. Маса космонавта $m = 70$ кг, у багато разів менша від маси станції M. Вважайте, що радіус Землі дорівнює 6400 км.

3 (78). У скільки разів треба підвищити напругу джерела струму, щоб втрати потужності у лінії електропередачі зменшилися у 100 разів, а потужність, яка передається по лінії, не змінилася? Втрати напруги в лінії спочатку дорівнювали $U_в = kU$, де U – напруга на навантаженні.

4 (79). Два пласкі дзеркала розміщені під кутом 45° одне до одного. Людина знаходиться між дзеркалами на однаковій відстані від кожного з них. Скільки своїх зображень побачить людина?

5 (80). Дано амперметр (який має опір), вольтметр, джерело струму, резистор з невідомим опором і з'єднувальні провідники (їх опором знехтуйте). Як виміряти опір резистора з найбільшою точністю?

10 клас

1993

1 (81). На похилій площині, що утворює кут α з горизонтом, знаходиться бак з водою масою M. З якою силою, паралельно похилій площині, треба рухати бак, щоб поверхня в ньому була паралельною похилій площині? Коефіцієнт тертя між дном бака і похилою площиною дорівнює k.

2 (82). З вежі, що має висоту h, кидають одночасно дві кульки: одну вгору з швидкістю v_1, іншу – вниз із швидкістю v_2. Який проміжок часу відділяє моменти їх падіння на Землю?

3 (83). Швидкість звуку в газі можна подати формулою, яка містить тиск – p, густину газу ρ і деякий безрозмірний параметр. Використавши цю інформацію, визначіть співвідношення швидкостей звуку для одного розрідженного газу в двох станах відповідно з величинами P_1, P_2, ρ_1, ρ_2.

4 (84). Оцініть відносну похибку при зважуванні тіла об'ємом $V = 1$ л, якщо під час зважування в повітрі тіло зрівноважено на вазі мідними різноважками масою $m = 800$ г?
Густина міді дорівнює $\rho = 8{,}8$ г/см^3, повітря – $\rho_o = 1{,}29 \cdot 10^{-3}$ г/см^3.

5 (85). Якій необхідній та достатній умові задовольнятимуть опори $r_1, r_2, r_3, R_1, R_2, R_3$, щоб ділянка контура, яка зображена на рис. 1 була еквівалентна ділянці, зображеній на рис. 2?

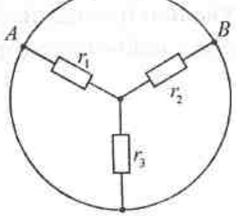


Рис. 1.

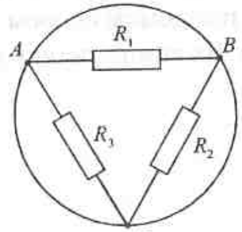
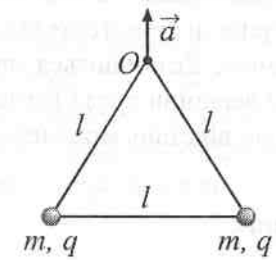


Рис. 2.

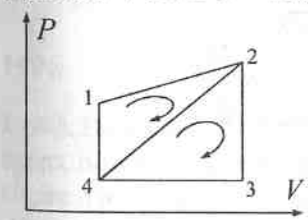
1994

1 (86). Прямокутний брусок, висота якого значно перевищує довжину і ширину, стоїть на горизонтальній поверхні. Визначіть коефіцієнт тертя між бруском і поверхнею, маючи один вимірювальний прилад – лінійку?

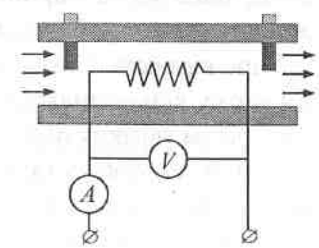
2 (87). Дві однакові заряджені кульки (маса і заряд кожної дорівнюють $m = 10$ г і $q = 5 \cdot 10^{-7}$ Кл) з'єднані нитками з ізолятором завдовжки $l = 10$ см і $2l$. Систему утримують за середину довгої нитки, а потім точку підвісу починають піднімати вгору з прискоренням a, яке дорівнює за модулем прискоренню вільного падіння g. Визначіть натяг нитки, що з'єднує кульки під час піднімання.



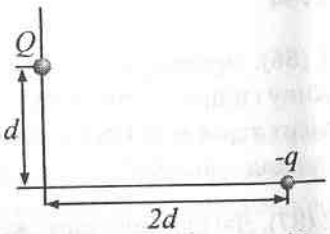
3 (88). Коефіцієнт корисної дії (ККД) циклу 1–2–4–1 дорівнює η_1, а циклу 2–3–4–2 дорівнює η_2. Визначіть ККД циклу 1–2–3–4–1. Ділянки 4–1 і 2–3 – ізохори, 3–4 – ізобара, 1–2 і 2–4 виражають лінійну залежність тиску від об'єму. Всі цикли обходяться за годинниковою стрілкою. Робоча речовина – ідеальний газ. ККД називається відношення роботи, виконаної в циклі, до кількості теплоти, затраченої на здійснення циклу.



4 (89). У проточному калориметрі досліджуваний газ пропускають по трубопроводу з нагрівником. Газ надходить у калориметр при $t_1 = 20\,^\circ$C. При потужності нагрівника $P_1 = 1$ кВт і витраті газу 540 кг/год температура його дорівнюватиме t_2. Визначіть температуру t_2, якщо молярна теплоємність газу при сталому об'ємі $c_V = 21$ Дж/моль·К, молярна маса – $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, тиск повітря – незмінний.

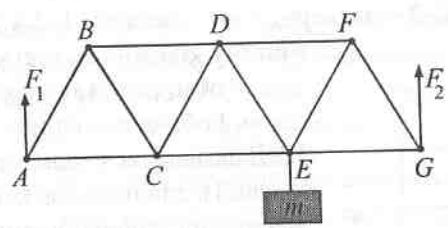


5 (90). На непровідний стрижень, зігнутий під кутом 90°, нанизані намистинки рівних мас, які несуть заряд протилежних знаків Q і q. У початковий момент намистинки нерухомі й знаходяться на відстані d і $2d$ від вершини кута. Тертя відсутнє. Відпустімо їх. Де опиниться друга намистинка в момент, коли ближча дійде до вершини кута? Визначіть швидкість намистинок у той момент, коли відстань між ними d.

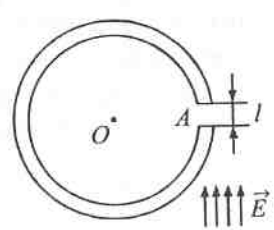


1995

1 (91). Ферма моста складається з невагомих стрижнів однакової довжини, з'єднаних між собою шарнірно (див. рис.). Тертя в шарнірах відсутнє. Знайдіть сили реакції F_1 і F_2 і зусилля в стрижні DF, коли в точці E підвісили вантаж масою m.



2 (92). Тонке жорстке кільце з діелектрика масою M і радіусом R може вільно обертатися навколо фіксованої вертикальної вісі O (див. рис.). Кільце рівномірно заряджене по довжині, його заряд дорівнює Q. Невелику ділянку кільця поблизу точки A вирізали так, що виникла щілина довжиною $l << R$. Спочатку кільце знаходилось у стані спокою, потім увімкнули однорідне електричне поле з напруженістю E, перпендикулярною до вісі кільця і прямої OA. Визначіть максимальну кутову швидкість кільця.



3 (93). При вибусі атомної бомби (M = 1 кг плутонію Pu^{242}) одержується одна радіоактивна частинка на кожен атом плутонію. Припускаючи, що вітри рівномірно переміщують ці частинки по всій атмосфері, підрахуйте, яка кількість радіоактивних частинок потрапляє в кожен літр повітря поблизу поверхні Землі. Які додаткові дані Вам потрібні для розв'язання цієї задачі?

4 (94). У циліндр радіусом R, який частково заповнений водою, падає циліндричний корок радіуса r і висоти h. Початкова висота нижнього торця корка над рівнем води H, початкова швидкість дорівнює нулеві. Скільки енергії виділилось у вигляді теплоти після того, як рух корка і води припинився? Густина корка ρ, густина води ρ_0, прискорення вільного падіння g.

5 (95). Якщо гальванічний елемент напругою 1,5 В підключити до затискачів A і $Б$ „чорної скриньки", амперметр покаже силу струму 1 А. Якщо ж поміняти полярність з'єднання джерела на протилежну, сила струму зменшиться у 2 рази. Яке електричне коло знаходиться всередині?

1996

1 (96). Вагон під дією поштовху, який надає йому тепловоз, рухався вверх по схилу упродовж 30 с до зупинки і пройшов шлях 64 м. Після цього вагон почав спускатися вниз по схилу і той же шлях пройшов за 40 с. Використовуючи ці дані, визначіть коефіцієнт тертя k (кут нахилу схилу та коефіцієнт тертя вважайте постійними).

2 (97). Визначіть центр ваги системи вантажів P_1, P_2, P_3, … , P_{10} (P_1 = 1 Н, P_2 = 2 Н, P_3 = 3 Н, … , P_{10} = 10 Н), розміщених уздовж горизонтального стрижня на однакових відстанях d один від одного. Вагою самого стрижня знехтуйте.

3 (98). Ідеальний газ міститься при температурі t_1 = 27 °C. Знайдіть температуру t_2 цього газу, якщо в результаті розширення, що відбувається за законом $PV^{3/2}$ = const, об'єм газу збільшиться в 4 рази.

4 (99). Повітряна куля має постійний об'єм $V = 1{,}1$ м³. Маса оболонки кулі – $m_0 = 0{,}187$ кг. Куля повинна стартувати при температурі навколишнього середовища $t_1 = 20$ °С і нормальному атмосферному тиску $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па. Розрахуйте мінімальну температуру t_2, до якої слід нагріти повітря всередині кулі, щоб вона почала підніматися.

5 (100). При тривалому протіканні струму $I_1 = 1{,}4$ А через дротину, вона нагрілась до $t_1 = 55$ °С, а при струмі $I_2 = 2{,}8$ А – до $t_2 = 160$ °С. Зміною опору дротини з температурою знехтуйте. Температура навколишнього середовища стала. Тепловіддача пропорційна до різниці температур дротини та повітря. До якої температури нагріється дротина, якщо струм $I_3 = 5{,}6$ А?

1997

1 (101). Циліндричний стрижень вагою P притискають до підлоги, прикладаючи силу F вздовж напрямку стрижня. Спочатку стрижень розміщають вертикально, згодом його поступово нахиляють. При куті нахилу α він зісковзує вздовж підлоги. Знайдіть коефіцієнт тертя спокою між матеріалами підлоги й стрижня. Розгляньте випадок, коли сила F набагато більша від ваги стрижня.

2 (102). Куля масою $m_1 = 10$ г і початковою швидкістю $v_1 = 500$ м/с пробиває незакріплену дошку масою $m_2 = 2$ кг і вилітає з неї зі швидкістю $v_2 = 300$ м/с. Скільки кінетичної енергії кулі перейшло в тепло?

3 (103). М'яч для гри у гольф потрібно закинути на віддаль 120 м. Знайдіть мінімальну початкову швидкість м'яча, потрібну для цього, час польоту м'яча та найбільшу висоту, якої він досягне. Під яким кутом до горизонту його слід скерувати? Опором повітря знехтуйте.

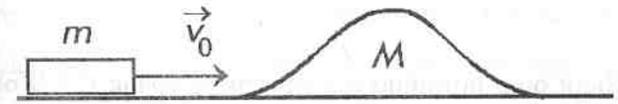
4 (104). У трубці, запаяній з одного кінця, знаходиться стовпчик ртуті довжиною $l = 0{,}3$ см. Трубку обертають в горизонтальній площині навколо вісі, що проходить через її закритий кінець. При якій кутовій швидкості ω ртуть досягне відкритого кінця трубки, якщо в нерухомій трубці вона знаходиться на відстані $d = 64$ см від закритого кінця? Довжина трубки $b = 80$ см, зовнішній тиск $p_0 =$

$= 100$ кПа, густина ртуті $r = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м³, а температура постійна. Капілярні явища не враховуйте. Довжину стовпчика ртуті вважайте дуже малою порівняно з довжиною трубки.

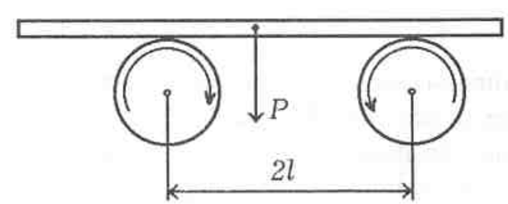
5 (105). Планету масою M і радіусом r оточує атмосфера постійної густини, яка складається з ідеального газу молярною масою m. Визначіть температуру T атмосфери на поверхні планети, якщо товщина атмосфери h набагато менша від радіуса планети.

1998

1 (106). Тіло масою $m = 1$ кг ковзає без тертя по гладкій горизонтальній поверхні і зустрічає нерухому гладку перешкоду масою $M = 5$ кг, яка також без тертя може ковзати по поверхні. Висота перешкоди $H = 1{,}2$ м. При якій мінімальній швидкості тіло подолає перешкоду? Знайдіть кінцеві швидкості тіла і перешкоди при початкових швидкостях тіла $V_0 = 5$ м/с і $V_0 = 6$ м/с.

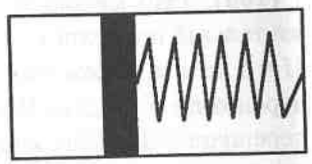


2 (107). Два паралельно розташованих однакових валики обертаються з однаковими швидкостями в напрямках, зображених на рисунку. На валики горизонтально покладена дошка вагою P, центр якої дещо зміщений відносно середини віддалі між валиками. Віддаль між вісями валиків дорівнює $2l$. Коефіцієнт тертя між валиками і дошкою дорівнює k. Як рухається дошка? Висновок обґрунтуйте розрахунками.

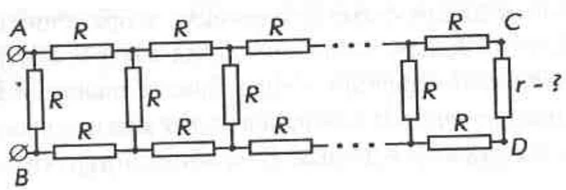


3 (108). Мильна бульбашка, заповнена гарячим повітрям, знаходиться нерухомо у повітрі. Атмосферний тиск дорівнює P_0, температура оточуючого повітря T_0, а молярна маса m . Густина мильної плівки r, її товщина d, а радіус бульбашки r. Знайдіть температуру повітря всередині бульбашки: а) не враховуючи сил поверхневого натягу; в) враховуючи поверхневий натяг (коефіцієнт натягу σ).

4 (109). Теплоізольований, закритий стінками з обох боків циліндр розділений на дві частини теплонепровідним поршнем, який може пересуватися без тертя. У лівій частині циліндра міститься 1 моль ідеального одноатомного газу, в правій – вакуум. Поршень з'єднаний з правою стінкою циліндра пружиною, довжина якої у недеформованому стані дорівнює довжині циліндра. Визначіть теплоємність системи. Теплоємністю циліндра, поршня і пружини знехтуйте.



5 (110). Який опір потрібно під'єднати до точок C і D останньої ланки схеми, щоб опір між точками A і B не залежав від кількості елементарних ланок?



1999

1 (111). Спортивний автомобіль масою m = 600 кг рухається уздовж екватора зі сходу на захід, а потім з тією самою швидкістю v = 600 км/год відносно Землі – навпаки в напрямку із заходу на схід. Знайдіть різницю сил тиску автомобіля на поверхню шосе в цих випадках.

2 (112). Два однакових димоходи печей заввишки 50 м і площею поперечного перерізу 0,5 м^2 зверху накривають дошкою, вагою якої можна знехтувати. Температури повітря у димоходах дорівнюють t_1 = 20 °C, t_2 = 77 °C, а зовнішня температура t = 0 °C. Якої мінімальної маси мав би бути вантаж прикріплений до центра дошки, щоб дим не виходив з димоходів? Атмосферний тиск нормальний.

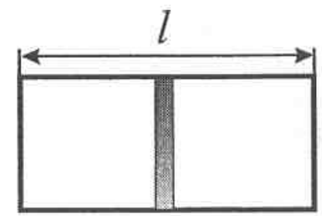
3 (113). Ґумова куля, яка вміщує 10^{-4} кг водню при тиску 1,05 атм, піднімається в кімнаті до стелі. Знайдіть площу дотику гумової кулі до стелі. Масою оболонки кулі знехтуйте.

4 (114). Дві закриті зверху циліндричні посудини A і B з об'ємами V кожна, з'єднані внизу трубкою з краном. У посудині A біля верхньої стінки знаходиться поршень. При закритому крані в посудині A міститься одноатомний газ, температура якого дорівнює 300 К, а посудина B порожня. Кран відкручують і поршень у посудині A опускається так, що тиск в ній залишається постійним. Знайдіть кінцеву температуру газу. Об'ємом трубки та тертям під час руху поршня знехтуйте. Зважте на те, що посудини і поршень теплоізольовані.

5 (115). Електрони, які на нескінченності мають швидкість v, потрапляють на металічну ізольовану кулю радіусом R. На скільки підвищиться температура кулі, якщо її теплоємність дорівнює C?

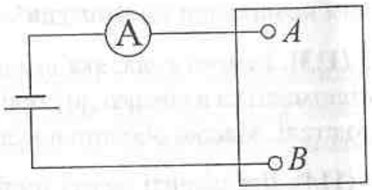
2000

1 (116). Циліндр (див. рис.) довжиною l перегороджений посередині тонким поршнем, маса якого m. У кожному відділенні міститься по одному молю ідеального газу при температурі T. Поршень трохи змістився від середини циліндра. Визначіть період малих коливань поршня, вважаючи, що вони пов'язані з ізотермічними процесами в газі.



2 (117). Відомо, що мінімальна напруженість однорідного електричного поля, яке розриває на дві частини провідну незаряджену тонкостінну сферу, дорівнює E_0. Визначіть мінімальну напруженість E_1 поля, яке розірве сферу удвічі більшого радіуса, якщо товщина її стінок залишається незмінною.

3 (118).



При підключенні гальванічного елемента з напругою $U_1 = 1{,}5$ В до клем A і B „чорної скриньки" (див. рис.) амперметр показав силу струму $I_1 = 1$ А. Коли полярність елемента змінили на протилежну, сила струму зменшилась удвічі. Розгляньте можливі випадки, що може знаходитись всередині скриньки, та наведіть схеми з'єднання елементів.

4 (119). Хлопець стріляє з рогатки вертикально вгору, влучає каменем у карниз будинку, який знаходиться на висоті $h = 20$ м, після чого камінь падає на землю. Вважаючи удар абсолютно непружним (камінь після удару повністю втрачає швидкість), визначіть силу удару, якщо відомо, що початкова швидкість каменя $V_0 = 25$ м/с, його маса $m = 0{,}01$ кг і камінь падає на землю через $t_0 = 3{,}01$ с. Вважайте, що прискорення g дорівнює 10 м/с².

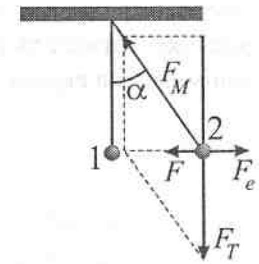
5 (120). Чому тріщини у трубах, що руйнуються взимку при замерзанні у них води, завжди йдуть вздовж, а не впоперек труби?

11 клас

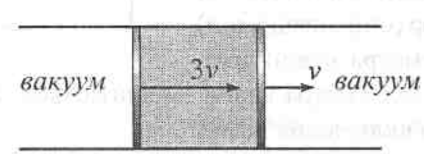
1993

1 (121). З центра більярдного стола, який має форму квадрата зі стороною a і b, чотирьох кутах якого знаходяться отвори, рухається більярдна куля зі швидкістю v, напрямленою під кутом α до однієї зі сторін стола. Вважаймо, що всі удари кулі об борти стола абсолютно пружні, тертя між кулею і столом відсутнє, розмірами кулі й отвора знехтуймо. Чи влучить коли-небудь куля в отвір? Якщо так, то через який час це станеться і скільки разів за цей час вона відіб'ється від стінок?

2 (122). Кулька масою m і зарядом q, яка підвішена на нитці довжиною l, обертається навколо нерухомої кульки такого ж заряду, що закріплена на одній вертикальній вісі з точкою підвісу і лежить у площині обертання. Кут між напрямком нитки і вертикаллю дорівнює α. Знайдіть частоту обертання кульки.

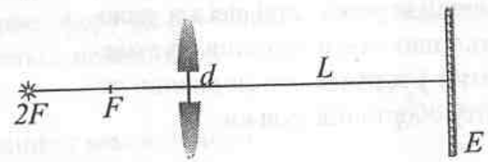


3 (123). У довгій трубці між двома поршнями маси m кожний знаходиться n молів ідеального одноатомного газу, маса якого значно менша від маси поршнів. Початкова температура газу T_0. У решті трубки – вакуум. У початковий момент правий поршень має швидкість v, а лівий – $3v$. Поршні рухаються праворуч. Знайдіть максимальну температуру газу. Система теплоізольована. Теплоємністю трубки та поршнів знехтуйте.



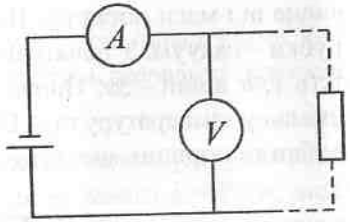
4 (124). Циліндричну склянку висотою $l = 15$ см, площею поперечного перерізу $S = 20$ см² і масою $m = 0{,}1$ кг занурили в озеро, перевернули під водою вверх дном і в такому положенні вийняли з води. Яка робота затрачена на виймання склянки, якщо в момент, коли склянку почали виймати, її дно знаходилося на відстані $h = 20$ см від поверхні води. Атмосферний тиск $p_a = 10^5$ Па. Як би змінилася ця робота, якби атмосферний тиск був меншим у 100 разів? Товщиною стінок і дна склянки знехтуйте.

5 (125). Тонку лінзу з фокусною відстанню F розрізали по площині, що проходить через її головну вісь на дві половини, розсунули половинки на відстань $d << F$ і закрили щілину непрозорою пластинкою. З одного боку цієї системи на відстані $2F$ від лінзи встановили джерело світла, а з іншого на відстані $L >> F$ екран, як зображено на рисунку. Визначіть розташування інтерференційних максимумів і мінімумів на екрані.



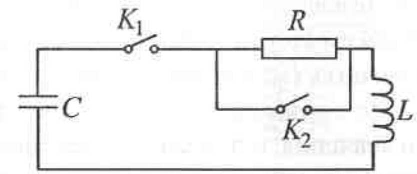
1994

1 (126). До батареї з електрорушійною силою $E = 9$ В і невідомим внутрішнім опором підключені послідовно амперметр і вольтметр (див. рис.). Опори приладів невідомі. Якщо паралельно до вольтметра підключити резистор (опір невідомий), то покази амперметра вдвічі зростають, а покази вольтметра вдвічі зменшуються. Яким став показ вольтметра після включення резистора.

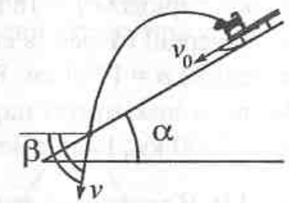


2 (127). У циліндричну посудину об'ємом $V = 8{,}31$ м^3 накачали спочатку газу масою $m_1 = 3{,}2$ кг з молярною масою $\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль при $T = 300$ К, а потім додали газу масою $m_2 = 4{,}4$ кг з молярною масою $\mu_2 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль при тій же температурі T. Який тиск встановиться в посудині після того, як суміш газів ізотермічно стиснути за допомогою поршня при температурі T до об'єму $V/3$?

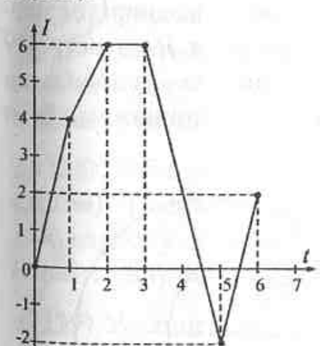
3 (128). Конденсатор ємністю C після замикання ключа K_1 починає розряджатися через резистор опором R і котушку індуктивністю L. У момент, коли сила струму в колі досягне максимального значення I_0, замикають ключ K_2. Чому дорівнює напруга на котушці безпосередньо перед замиканням ключа K_2 і максимальна сила струму в колі при наступних коливаннях?



4 (129). Санки з хлопчиком і собакою загальною масою M скочуються з постійною швидкістю v_0 з гори (див. рис.), кут нахилу якої до горизонту α ($\cos \alpha = 6/7$). Собака масою m стрибає зі санок по ходу їх руху і приземляється з швидкістю v, що спрямована під кутом β до горизонту ($\cos \beta = 3/7$). Після стрибка собаки санки рухаються по схилу вниз. Визначіть швидкість санок із хлопчиком після стрибка собаки.



5 (130).



Сила струму через котушку індуктивності змінюється з часом так, як схематично зображено на рисунку. Накресліть схематично залежність ЕРС індукції від часу.

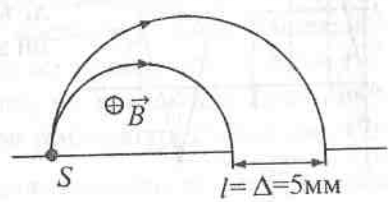
1995

1 (131). Постійна напруга на лінії електровоза $E = 500$ В. При русі електровоза зі швидкістю $v = 72$ км/год сила струму в обмотці електродвигуна $I = 1000$ А, а сила пускового струму $I_0 = 2000$ А. Яку силу тяги розвине електровоз, рухаючись з цією швидкістю? Який при цьому ККД електровоза? Вважайте, що розгін відбувається без зміни опору кола електродвигуна (тобто без пускового реостата).

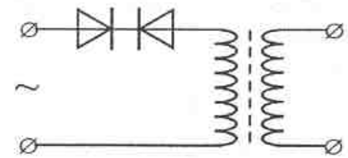
2 (132). Маємо складне електричне коло, яке складається з однакових конденсаторів відомої ємності, з'єднаних між собою як послідовно, так і паралельно. Спочатку ємність батареї конденсаторів була розрахована. Оскільки коло є дуже складним, то спробували перевірити експериментально значення, одержане з теоретичних розрахунків. Для цього використали набір однакових резисторів, вольтметр, амперметр і батарею гальванічних елементів. Запропонуйте, як здійснити експериментальну перевірку ємності кола?

3 (133). Космічна автоматична станція обертається навколо планети Марс з періодом $T = 18$ год 00 хв. Максимальне відхилення станції від поверхні Марса (в апоцентрі) $a = 25000$ км, Мінімальне (у перицентрі) $p = 1380$ км. Визначіть відношення маси Марса до маси Землі за вказаними параметрами орбіти станції. Радіус Марса $R_M = 3400$ км, Радіус Землі $R_З = 6400$ км.

4 (134). В установці для розділення ізотопів U^{235} та U^{238} (див. рис.) пучок однократно йонізованих прискорених йонів урану з енергією $E = 5 \cdot 10^3$ еВ потрапляє від джерела через щілину S в однорідне магнетне поле, перпендикулярно до площини рисунка. В магнетному полі йони різних мас рухаються по різних півколах і, здійснивши півоберт, потрапляють у приймачі. Конструкція останніх має бути такою, щоб відстань між пучками U^{235} та U^{238} на виході була не менша, ніж $l = 5$ мм. Якою має бути індукція магнетного поля B, щоб задовольнити цій умові? Визначіть також час потрібний для повного розділення 1 кг природного урану, якщо сила йонного струму дорівнює $I = 1$ mA.

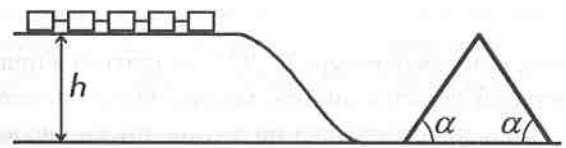


5 (135). У первинну обмотку трансформатора увімкнуті з'єднані послідовно в протилежних напрямках два напівпровідникові діоди (див. рис.). Накресліть осцилограму струму в первинній обмотці й ЕРС, яка виникає у вторинній.



1996

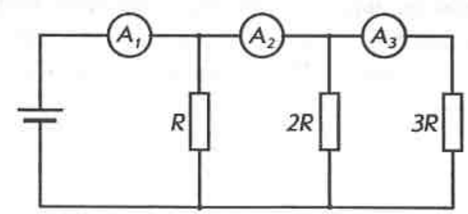
1 (136). Вагони масою m, довжиною l з'їжджають з гірки висотою $h > l/4$, як зображено на рисунку. Їх початкова швидкість дорівнює нулеві. Якої найбільшої висоти гірку вони зможуть подолати за інерцією, якщо гірка має форму рівнобедреного трикутника з кутом α в основі?



2 (137). Куля масою m горизонтально вдаряється об брусок масою M, що лежить на горизонтальній гладкій поверхні. Швидкість кулі в момент удару v. Яка максимальна кількість тепла може виділитися в місці зіткнення? В яких випадках кін. енергія = Q?

3 (138). Куб з ребром довжиною l рухається зі швидкістю v ($v << (3kT/m)^{1/2}$) в ідеальному газі частинок масою m у напрямку, перпендикулярному до однієї з його граней. Температура газу T, тиск p. Оцініть силу опору, з якою газ діє на куб.

4 (139). Усі амперметри у схемі однакові (див. рис.). Покази першого амперметра $I_1 = 10$ мА, третього – $I_3 = 1$ мА. Що показує другий амперметр?



5 (140). Чому нитка розжарення лампи виглядає червоною, якщо розглядати її через матове скло?

1997

1 (141). Тіло кинули під кутом 60° до горизонту з початковою швидкістю 30 м/с. Знайдіть його переміщення за останню секунду польоту.

2 (142). На поверхні озера плаває однорідний суцільний куб, на дві третини занурений у воду. Сторона куба 30 см. Яку роботу потрібно виконати, щоб занурити його під воду так, щоб центр куба знаходився на глибині 1 м? Чи залежить ця робота від орієнтації куба під водою?

3 (143). Кисень при температурі 27 °С знаходиться в циліндричній посудині, закритій зверху поршнем масою 100 кг і поперечним перерізом 1м^2. Поршень прикріплений до дна пружиною жорсткістю 1 кН/м і може ковзати в посудині без тертя. У початковий момент пружина недеформована, поршень знаходиться в рівновазі, кисень займає об'єм 1 м^3. Яку кількість теплоти потрібно надати кисню, щоб його об'єм збільшився на 10 % ? Теплоємністю системи знехтуйте, поршень та посудина не проводять тепло.

4 (144). Металевий стрижень довжиною L обертається навколо вісі, що проходить через його середину перпендикулярно до стрижня, з циклічною частотою ω. Знайдіть:

а) розподіл напруженості електричного поля всередині стрижня;

б) напругу між кінцем та серединою стрижня;

в) розподіл електричного заряду в стрижні.

5 (145). Яка буде віддаль від предмета до його зображення, якщо дивитися на предмет через прозору скляну пластину товщиною h з показником заломлення n? Чи відрізняється розмір зображення від розміру предмета?

1998

1 (146). До конденсатора, що складається з двох квадратних пластин зі стороною 10 см, розташованих на віддалі 1 см одна від одної і розділених повітрям, прикладено напругу 0,1 В. Між пластини конденсатора влітає електрон зі швидкістю v_0, напрямленою паралельно до пластин конденсатора та перпендикулярно до однієї з його сторін. У початковий момент віддаль електрона від від'ємно зарядженої пластини 4 мм. Якою має бути початкова швидкість, щоб електрон пролетів крізь конденсатор? Відношення заряду електрона до його маси $1{,}759 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

2 (147). Чому, коли ми підносимо наелектризований гребінець до дрібних клаптиків паперу, вони всі притягуються до гребінця і жоден не відштовхується? Чи буде поведінка клаптиків такою ж, якщо ми піднесемо до них наелектризовану скляну паличку?

3 (148). У вертикальному циліндрі під поршнем масою M, що може ковзати без тертя, перебуває газ. Відстань від поршня до дна циліндра h. Якою буде відстань поршня від дна циліндра, якщо циліндр рухатиметься вертикально вгору з прискоренням a, а температура газу залишиться незмінною?

4 (149). На тонкій гумці, яка без навантаження мала довжину 0,5 м та коефіцієнт жорсткості 0,98 Н/м, підвісили тягарець масою 10 г. Після встановлення рівноваги тягарець відтягнули вертикально вниз на 20 см від рівноважного розташування і відпустили. Визначіть період коливань та найменшу віддаль тягарця від точки підвісу.

5 (150). Який найбільший кут може бути між двома гранями призми, виготовленої з прозорого матеріалу з показником заломлення 2, щоб через ці дві грані ще можна було побачити джерело світла?

1999

1 (151). Між стінкою і кубом масою $M = 10$ кг ковзає на гладкому столі пружна кулька маси $m = 0{,}1$ г. Швидкість кульки, коли куб ще був нерухомий, дорівнювала $v_0 = 100$ м/с. Знайдіть швидкість куба тоді, коли він буде удвічі далі від стінки, ніж спочатку.

2 (152). У кубічній посудині $V = 1$ л знаходиться гелій при температурі $T = 300$ К. Спостерігатимемо за однією молекулою. Оцініть скільки разів вона вдариться об верхню стінку посудини за час $t = 1$ с?

3 (153). Визначіть силу взаємодії пластин плоского конденсатора. Площа пластин дорівнює S, відстань між пластинами – d, напруга на конденсаторі – U. Як зміниться ця сила, якщо внести в конденсатор діелектричну пластинку з діелектричною проникністю ε товщиною d_1 ($d_1 < d$), якщо:

а) конденсатор від'єднаний від акумуляторної батареї?

б) конденсатор під'єднаний до акумуляторної баратеї?

4 (154). На передню грань плоскопаралельної пластинки, виготовленої зі скла з показником заломлення n, падає збіжний світловий пучок, що має форму конуса з кутом при вершині 2α. Діаметр освітленої плями на передній грані пластинки D. При якій товщині пластинки діаметр вихідної плями дорівнюватиме $D/2$?

5 (155). З невагомих стрижнів завдовжки l і $2l$ складена конструкція (рис. 1.). Тертя у шарнірах відсутнє. У середню ланку вставили невагому пружину, після чого конструкція набула форми, зображеної на (рис. 1.) з відомим кутом α. Потім знизу підвісили вантаж, і кут став рівним β (рис. 2). Яким буде період коливань, якщо зрушити вантаж у вертикальному напрямку?

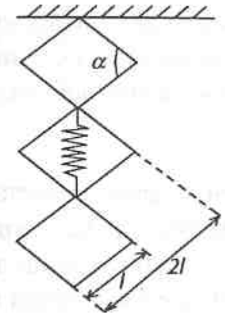


Рис. 1.

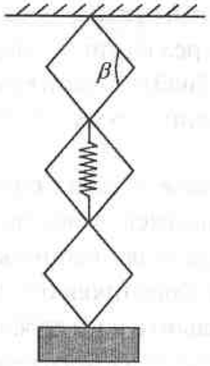
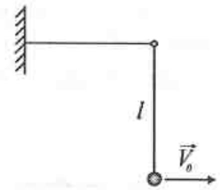


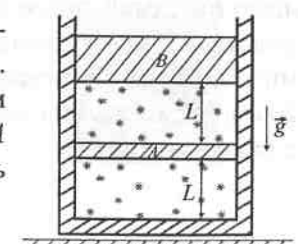
Рис. 2.

2000

1 (156). Маленька кулька підвішена до кронштейна на тонкій невагомій нитці, довжина якої $l = 10$ см (див. рис.). Якою має бути найменша швидкість v_0 кульки у горизонтальному напрямку, щоб вона вдарилася об кронштейн у точці підвісу?

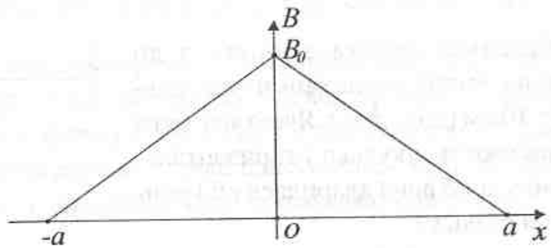


2 (157). У теплоізольованій циліндричній посудині легкий теплопровідний поршень A і важкий теплоізолюючий поршень B утворюють два об'єми (див. рис.). Довжина кожного об'єму $L = 40$ см і в кожному з них міститься 1 моль одноатомного ідеального газу. Уся система знаходиться в тепловій рівновазі. Згодом газ повільно нагрівають, передаючи йому теплоту у кількості $Q = 200$ Дж. Знайдіть найменшу силу тертя між поршнем A і стінками посудини, при якій поршень A ще буде нерухомим. Вважайте, що поршень B рухається без тертя.



3 (158). У сферичному глобусі, діаметр якого 1 м, паралелі й меридіани виготовлені з дроту. Меридіани йдуть через кожні 10°, а паралелі – через кожні 5°. Паралелі та меридіани з'єднані у місцях їх перетину. Знайдіть опір між полюсами такого глобуса, якщо опір одиниці довжини дроту $r = 7{,}2$ Ом/м.

4 (159). Дротяне кільце пролітає між полюсами магнета, не встигаючи повернутись. Магнетне поле напрямлене перпендикулярно до площини кільця і напрямку його руху. Оцініть зміну швидкості кільця за час його прольоту через магнетне поле, якщо швидкість кільця при вльоті в поле дорівнює $v_0 = 20$ м/с, діаметр кільця $D = 6$ мм, діаметр дроту $d << D$, його питомий опір $\rho_0 = 2\cdot10^{-8}$ Ом·мм і густина матеріалу $\rho_м = 9\cdot10^3$ кг/м³. Залежність величини індукції магнетного поля від координати x вздовж траєкторії руху кільця зображено на рисунку, причому $a = 10$ см, $B_0 = 1$ Тл. Вважаймо, що $a >> D$ і шукана зміна швидкості $\Delta v << v_0$.



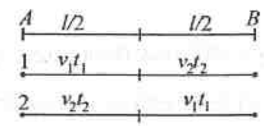
5 (160). За допомогою фотоапарата на фотопластинці отримали чітке зображення предмета, який розташований на відстані 4 м перед об'єктивом і має розмір 2 см. На якій відстані від об'єктива розміщено той самий предмет, якщо його зображення на тій же пластинці (відстань від об'єктива до пластинки є незмінною) отримали з розмітістю 1 мм. Діаметр об'єктива – 2 см, а його фокусна відстань – 20 см. Якою буде відповідь задачі, якщо фокусна відстань об'єктива дорівнюватиме 30 см?

РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ III (ОБЛАСНОГО) ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З ФІЗИКИ

8-й клас

1993

1 (1).



Час руху команди буде мінімальним при умові, що час руху обох спортсменів пішки однаковий $t_{11} = t_{12} = t_1$ і час руху спортсменів на велосипеді однаковий $t_{21} = t_{22} = t_2$. Ці умови виконуються, якщо кожний спортсмен половину дороги йде пішки, а решту їде на велосипеді. Перший спортсмен стартує на велосипеді й на середині дистанції залишає велосипед, а далі йде пішки. Другий спортсмен робить все навпаки.

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{2v_1} + \frac{l}{2v_2} = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = 2\text{ год }10\text{ хв}.$$

2 (2).

Опустімо шланг у бочку як зображено на рис. 1 (сифон) і створюватимемо розрідження у шлангу. Вода підніматиметься і якщо вона досягне верхньої точки, то далі при незмінному розрідженні вона почне опускатися. Коли вода опуститься нижче рівня води у бочці, то далі рухатиметься навіть без розрідження у шлангу (так працює сифон).

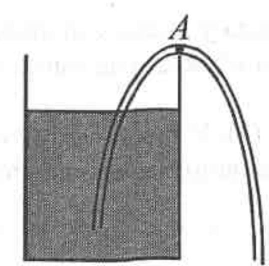


Рис. 1.

Нехай маємо шланг заповнений водою (вода нерухома) як зображено на рис. 2, тоді тиск у точках A та C $p_A = p_C = p_0$, а у точці B: $p_B = p_C - \rho g h = p_0 - \rho g h$. Тиски у точках A і B різні, що ніби суперечить закону сполучених посудин, тобто рідина у шлангу рухається від точки A, де тиск більший, до точки B, де тиск менший. Завдяки тому, що рідина рухається, і не виконується закон сполучених посудин.

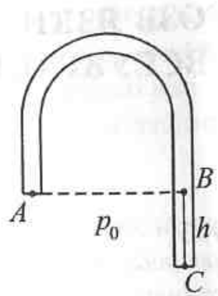


Рис. 2.

Визначімо на яку висоту h підніметься вода при створенні у шлангу розрідження $p_1 = 5\cdot 10^4$ Па. У статичному стані тиски у точках A і B (рис. 3) рівні за законом сполучених посудин $p_A = p_B$, $p_A = p_0 = 10^5$ Па – нормальний атмосферний тиск. $p_B = p_1 + \rho g h$ (тиск у точці B створюється зовнішнім тиском p_1, що передається за законом Паскаля, й власним тиском рідини).

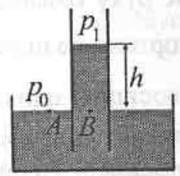


Рис. 3.

$$p_0 = p_1 + \rho g h,$$

звідси

$$h = \frac{p_0 - p_1}{\rho g} = 5\text{ м}.$$

Вода у шлангу підніметься на висоту 5 м. Це означає, що з бочки висотою 2 м за допомогою сифона завжди можна висмоктати воду.

3 (3). У початковому стані (рис. 1.) тиски у точках A та B рівні за законом сполучених посудин.

$$p_A = p_B,$$

$$\rho_г g(\Delta h + h_1) = \rho_в g h_1,$$

$$h_1 = \frac{\rho_г \Delta h}{\rho_в - \rho_г} = 12\text{ см}.$$

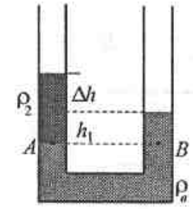


Рис. 1

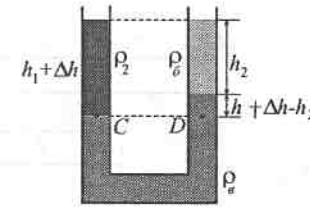


Рис. 2

У кінцевому стані (рис. 2) тиски у точках C і D рівні:

$$p_C = p_D,$$

$$\rho_г g(\Delta h + h_1) = \rho_б g h_2 + \rho_в g(h_1 + \Delta h - h_2),$$

$$h_2 = \frac{(\rho_в - \rho_г)(h_1 + \Delta h)}{\rho_в - \rho_б} = 10\text{ см}.$$

Висота стовпчика бензину 10 см.

4 (4). У процесі теплообміну частина енергії нагрівача $\eta N t$ йде на плавлення льоду $\lambda m_л$ і на нагрівання всієї води до кипіння

$$(\theta = 100\,°\text{C})\ c_в(m_в + m_л)\theta.$$

Запишімо рівняння теплового балансу:

$$\eta N t = \lambda m_в + c(m_в + m_л)\theta,$$

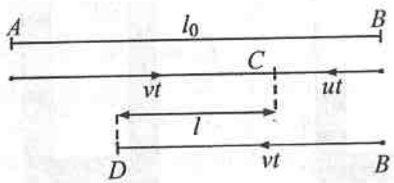
$$t = \frac{m_л\lambda + c_в(m_в + m_л)\theta}{\eta N} \approx 25\text{ хв}.$$

5 (5). Якщо обидва кубики мали однакову температуру, то ніякого теплообміну між ними не буде.

$$Q = 0.$$

1994

1 (6).



$AB = l_0$ – колона, що зустріла тренера у точці B. Точка C – точка зустрічі тренера з останнім спортсменом колони. $l_0 = vt + ut$, звідси

$$t = \frac{l_0}{u+v},$$

де t – час формування нової колони, в якій перший спортсмен з точки B перемістився в точку D, а останній спортсмен знаходиться у точці C. Тоді довжина нової колони:

$$l = vt - ut = \frac{(v-u)l_0}{u+v}.$$

2 (7). Запишімо умову рівноваги системи якір-куля (вважаймо, що якір піднімається рівномірно):

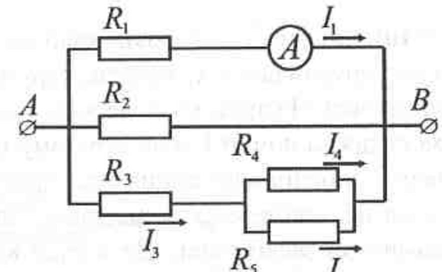
$$F_{AK} + F_{AЯ} = m_К g + m_Я g,$$

$$\rho_B g(V_К + V_Я) = (\rho_К V_К + m_Я)g,$$

$$V_К = \frac{m_Я(\rho_Я - \rho_B)}{(\rho_B - \rho_К)\rho_Я} = 0{,}8\ \text{м}^3.$$

3 (8). Запишімо закон Ома для першого резистора:

$$U_1 = I_1 R_1 = 1\ \text{В}.$$



Опори R_1, R_2 і R_{345} з'єднані паралельно, це означає, що $U_1 = U_2 = U_{AB} = U_{345} = 1$ В. Визначімо опір

$$R_{345} = R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{5}{3}\ \text{Ом}.$$

Тоді

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_{345}} = 0{,}6\ \text{А},$$

$$U_3 = I_3 R_3 = 0{,}6\ \text{В}.$$

При послідовному з'єднанні:

$$U_{AB} = U_3 + U_{45},$$

$$U_{45} = U_{AB} + U_3 = 0{,}4\ \text{В} = U_4 = U_5.$$

Тоді $$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = 0{,}2\ \text{А}.$$

4 (9). При вмиканні нагрівника робота електричного струму Pt_1 йде на нагрівання води $cm\Delta T$ й у навколишнє середовище αt_1 (α – коефіцієнт тепловіддачі).

$$Pt_1 = cm\Delta T + \alpha t_1. \quad (1)$$

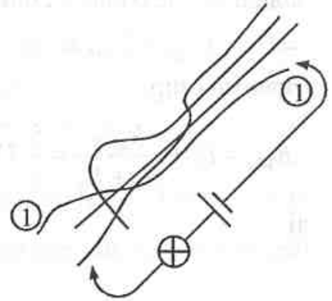
При вимкненні нагрівника енергія води $cm\Delta T$ йде у навколишнє середовище αt_2:

$$cm\Delta T = \alpha t_2. \quad (2)$$

Розв'яжімо систему рівнянь теплового балансу (1), (2):

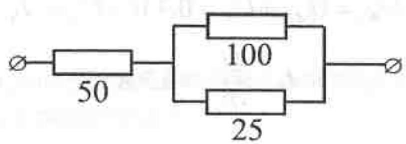
$$\alpha = \frac{Pt_1}{t_1 + t_1}, \; m = \frac{\alpha t_2}{c\Delta T} = \frac{Pt_1t_2}{c\Delta T(t_1 + t_2)} = 4{,}8\,\text{кг}\,.$$

5 (10). Складімо послідовне коло з дроту на другий поверх, джерела струму і лампочки. На другому поверсі торкнемось дрота номер 1, а на першому поверсі – послідовно кінців усіх дротів, доки не знайдемо кінець дроту, щоб лампочка засвітилась. Це й буде кінцем дроту номер 1. Аналогічно поступімо з іншими дротами.



1995

1 (11). Розглянувши всі можливі з'єднання трьох опорів, бачимо, що потрібною є схема:



Її опір:

$$R = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} + R_2 = 70\,\text{Ом}\,.$$

2 (12). Визначімо на скільки нагріється краплина води $\Delta t_к$, падаючи з висоти $h = 4{,}2$ м за умови, що вся її потенціальна енергія mgh перетвориться у внутрішню $c_в m\Delta t_к$ без тепловіддачі іншим тілам.

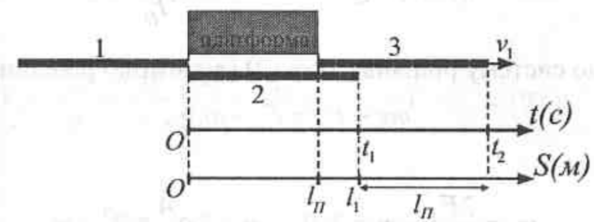
$$mgh = c_в m\Delta t_к\,,$$

звідси

$$\Delta t_к = \frac{gh}{c_в} = 0{,}01°\text{C}\,.$$

Це означає, що при падінні краплі у калориметр система крапля-калориметр нагріється на $\Delta t < 0{,}01°\text{C}$, тобто зафіксувати падіння краплі неможливо.

3 (13).



На рисунку зображено: 1 – потяг у момент часу, коли він почав проходити повз край платформи, 2 – потяг закінчив проходити край платформи, 3 – потяг закінчив проходити повз платформу, $l_п$ – довжина платформи, l_1 – довжина потяга.

З рисунка:

$$v_1 = \frac{l_п}{t_2 - t_1} = 15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\,,$$

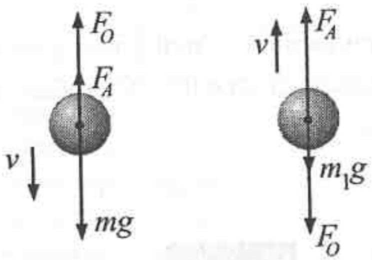
$$l_1 = v_1 t_1 = 360\,\text{м}\,.$$

4 (14). Законом Архімеда користуються тільки для нерухомої рідини (у рухомій рідині відбувається зміна статичного тиску в рідині залежно від швидкості її руху, а сила Архімеда – це сума сил статичного тиску, що діють на тіло). Вважаймо, що кулька рухається так повільно, що можна користуватись законом Архімеда. Розгляньмо умови рівномірного руху кульки.

Сила опору кульки в обох випадках однакова тому, що форма, розміри і швидкість однакові:

$$mg = F_A + F_{оп}\,, \tag{1}$$

$$F_A = m_1 g + F_{on}\,. \qquad (2)$$



Розв'яжімо систему рівнянь (1) та (2) (віднімемо рівняння):

$$mg - F_A = F_A - m_1 g\,,$$

звідси

$$m_1 = \frac{2F_A}{g} - m = 2\rho V - m = 2\rho\frac{4}{3}\pi R^3 - m\,,$$

$$m_1 = \frac{8\rho\pi R^3}{3} - m\,.$$

5 (15). Знайдімо роботу, яку слід виконати, щоб відкачати воду з підвалу:

$$A = \rho V g h\,,$$

де V – об'єм підвалу, h – висота, на яку підніматиметься центр мас об'єму води.
Знайдімо час відкачування води:

$$t = \frac{A}{N} = \frac{\rho V g h}{N} = 5\text{ год. } 20\text{ хв.}$$

1996

1 (16). При змішуванні води відбувається теплообмін. Гаряча вода віддає енергію:

$$Q_1 = c m_1 (t_1 - \theta)\,,$$

де m_1 – маса гарячої води, $t_1 = 78\,°\mathrm{C}$ – температура гарячої води $\theta = 36\,°\mathrm{C}$ – кінцева температура.
Холодна вода приймає енергію:

$$Q_1 = c(m - m_1)(\theta - t_2)\,,$$

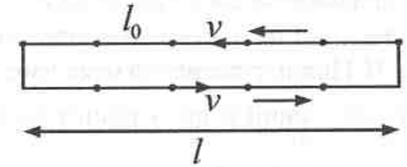
де m – загальна маса води, t_2 – температура холодної води).
Запишімо рівняння теплового балансу:

$$Q_1 = Q_2\,,\ \text{або}\ c m_1 (t_1 - \theta) = c(m - m_1)(\theta - t_2)\,,$$

звідси

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho} = \frac{V(\theta - t_2)}{t_1 - t_2} = 128\text{ л}\,,\quad V_2 = V - V_1 = 192\text{ л}\,.$$

2 (17).



Трамваї по маршруту розподілені рівномірно, тому відстань між ними:

$$l_0 = \frac{2l}{N}\,.$$

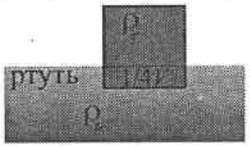
Час між зустрічами трамваїв:

$$t = \frac{l_0}{v + v}\,,$$

звідси

$$v = \frac{l_0}{2t} = \frac{l}{Nt} = 4{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\,.$$

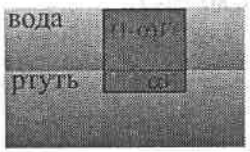
3 (18). Тіло плаває у ртуті. За умовою рівноваги сила Архімеда дорівнює силі тяжіння тіла



$$\rho_p g \frac{V}{4} = \rho_m g V \text{, звідси } \rho_m = \frac{\rho_p}{4}$$

При наявності води й ртуті на тіло діятимуть сили Архімеда, з боку води й з боку ртуті. Тоді умова рівноваги матиме вигляд:

$$F_m = F_{Ав} + F_{Ap} \text{ ,}$$



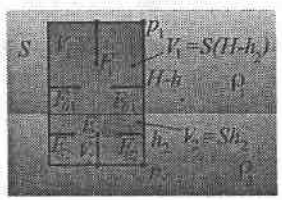
звідси $\rho_m V g = \rho_в g(1-\alpha)V + \rho_p g \alpha V$,

$$\alpha = \frac{\rho_m - \rho_в}{\rho_p - \rho_в} = 0{,}19 \text{ ,}$$

де α – частка об'єму що занурена у ртуть.

($\rho_p = 13600$ кг/м^3).

Доведемо, що ми правомірно ввели дві сили Архімеда. Визначімо виштовхувальну силу, що діє на вертикальний циліндр з площею основи S і висотою H. Циліндр плаває на межі двох рідин з густиною ρ_1 і ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) і занурений у другу рідину на h_2.



На циліндр діють сили тиску:

1. З боку першої рідини F_1 – вниз.

2. З боку другої рідини F_2 – вгору.

3. Сили тиску обох рідин на бічну поверхню є скомпенсованими $F_б = 0$.

Нехай тиск першої рідини на верхню поверхню циліндра p_1, а тиск другої рідини на нижню поверхню p_2. Визначімо

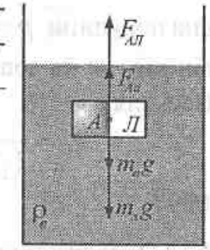
$$p_2 = p_1 + \rho_1 g(H - h_2) + \rho_2 g h_2 .$$

Розрахуймо виштовхувальну силу

$$F = F_2 - F_1 = (p_2 - p_1)S = S(\rho_1 g(H - h_2) + \rho_2 g h_2) = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2 .$$

Як бачимо виштовхувальна сила складається з двох доданків. Перший $\rho_1 g V_1$ – чисельно дорівнює вазі витісненої циліндром першої рідини, а другий $\rho_2 g V_2$ – вазі витісненої циліндром другої рідини. Ці доданки вважаймо, як дві сили Архімеда, що діють на циліндр з боку кожної рідини.

4 (19). При опусканні алюмінію у воду з температурою 0 °С почнеться теплообмін. Алюміній прийматиме енергію $Q_1 = c_a \rho_a V_a t_a$, а вода віддавати – $Q_2 = \lambda \rho_л V_л$, при цьому кристалізуючись.



$$Q_1 = Q_2 \text{ ,}$$

отже $\qquad c_a \rho_a V_a t_a = \lambda \rho_л V_л$. (1)

Щоб система алюміній-лід почала спливати, повинна виконуватись умова рівноваги:

$$F_A = F_{A.a.} + F_{A.л.} = m_a g + m_л g \text{ , звідси}$$

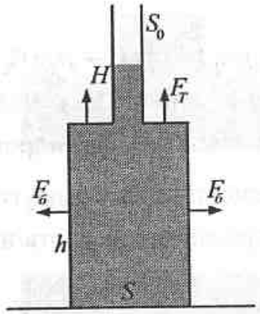
$$\rho_в g(V_a + V_л) = \rho_a V_a g + \rho_л V_л g \text{ .} \qquad (2)$$

Розв'язавши систему рівнянь (1) та (2), отримаймо:

$$-t_a = \frac{\lambda \rho_л (\rho_a - \rho_в)}{c_a \rho_a (\rho_в - \rho_a)} = 2100\,°\text{C} .$$

Температура алюмінію від'ємна (це враховано в рівнянні (1)), $t_a = -2100$ °С у природі не існує. Отже, охолоджуючи алюміній, неможливо спричинити його піднімання у воді за рахунок обмерзання льодом.

5 (20). На посудину з трубкою у момент відриву від опори (зникає сила реакції) діють: сили тяжіння mg вниз, сила тиску на дно посудини $F_m = p(S - S_0)$, сили тиску на бічні поверхні скомпенсовані



$$\sum F_б = 0.$$

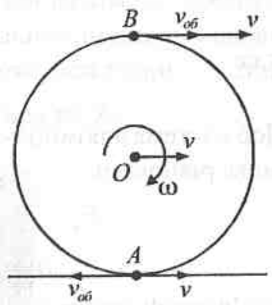
Умова рівноваги має вигляд:

$mg = p(S - S_0) = \rho g H(S - S_0)$, звідси

$$h + H = h + \frac{m}{\rho(S - S_0)}$$

– висота від поверхні опори, до якої можна наливати воду, щоб вона не витікала. Враховано, що гідростатичний тиск води на рівні дна посудини $p = \rho g H$. Атмосферний тиск не враховано, тому що він діє, як на зовнішню так і на внутрішню поверхні (за законом Паскаля).

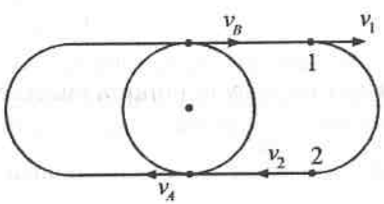
1997



1 (21). Розгляньмо рух колеса, що котиться без проковзування. Нехай вісь колеса (а це є частина автомобіля чи трактора) має швидкість v відносно Землі. Тоді рух різних точок на ободі колеса розглядатимемо як суму двох рухів: поступального руху вісі колеса і обертального руху точок обода навколо вісі $v_{об}$.

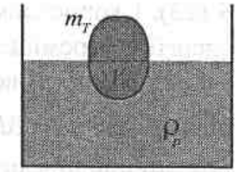
Розгляньмо точку A. Ця точка нерухома відносно Землі (відсутнє проковзування). Це означає, що з відсутністю проковзування поступального руху вісі колеса (автомобіля, трактора) і обертального руху точок обода – рівні $v_{об} = v$, отже $v_A = 0$. У точці B швидкості поступального і обертального руху додаються, тому

$$v_B = v_{об} + v = 2v.$$



Верхня ланка гусениці трактора має таку ж швидкість, що й точка B: $v_1 = 2v = 20$ км/год.

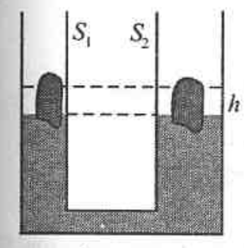
Нижня – нерухома: $v_2 = 0$.



2 (22). При потраплянні у рідину тіла, що плаває, воно витісняє таку масу рідини, що дорівнює масі тіла. Це випливає з умови рівноваги:

$$m_m g = \rho_p g V_1 = m_p g, \text{ звідси } m_m = m_p.$$

Потрапляння у рідину тіла еквівалентне добавці рідини масою, що дорівнює масі тіла. До U-подібної трубки додали $2m$ води, це привело до збільшення об'єму води на



$$V = (S_1 + S_2)h = \frac{2m}{\rho}.$$

Отже,

$$h = \frac{2m}{\rho(S_1 + S_2)}.$$

3 (23). При русі по горизонталі робота сили тяги, що діє на автомобіль, дорівнює частині теплоти, що виділяється при згорянні бензину $A_m = \eta Q = \eta m_б q_б = \eta \rho_б V_б q_б$ і йде на подолання роботи сили опору рухові автомобіля $A_{оп} = F_{оп} S$.

$$\eta \rho_б V_б q_б = F_{оп} S \quad (1)$$

При підйомі на гору робота сили тяги йде на подолання роботи сили опору $A_{оп} = 0{,}8 \cdot F_{оп} S$, (вважаймо, що в обидвох випадках сила опору не змінювалась) і роботи по подоланню сили тяжіння $A_T = mgh$.

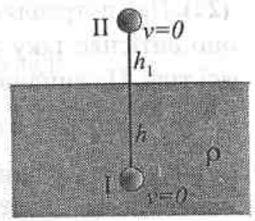
$$\eta \rho_б V_б q_б = 0{,}8 \cdot F_{оп} S + mgh \quad (2)$$

Розв'язавши систему рівнянь (1) та (2), отримуємо:

$$m = \frac{0{,}2 \eta \rho_б V_б q_б}{gh} = 3900 \text{ кг}.$$

4 (24). Дивись розв'язок задачі 9.

5 (25). Скористаймось законом збереження енергії. З переміщенням кульки з положення I у положення II вона збільшує свою потенціальну енергію $\Delta E_к = \rho_к V_к g(h + h_1)$ за рахунок зменшення потенціальної енергії ртуті (ртуть опускається з поверхневого шару на глибину h, вважаймо, що рівень ртуті залишається незмінним) $\Delta E_p = \rho_p V_к gh$.



$$\rho_к V_к g(h + h_1) = \rho_p V_к gh \ ,$$

звідси

$$h_1 = \frac{h(\rho_p - \rho_к)}{\rho_к} = 0{,}075\,\text{м} = 7{,}5\ \text{см} \ .$$

1998

1 (26). $m = 0{,}5\,\text{кг}$, $t = 20\,°\text{C}$, $m_л = 1\,\text{кг}$, $t_л = -40\,°\text{C}$. Обчислімо, яку кількість теплоти може віддати вода, охолонувши до 0 °C:

$$Q_в = c_в mt = 42000\ \text{Дж} \ .$$

Обчислімо теплоту, яку потрібно надати льоду для нагрівання до 0 °C:

$$Q_л = c_л m|t_л| = 84000\ \text{Дж} \ .$$

$Q_л > Q_в$, отже вода охолоне до 0 °C і почне кристалізуватися. Обчислімо теплоту, що виділиться при кристалізації:

$$Q_{кр} = \lambda m = 165000\ \text{Дж} \ .$$

$Q_{кр} + Q_в > Q_л$, отже вода кристалізується частково, кінцева температура системи 0 °C.

Запишімо рівняння теплового балансу:

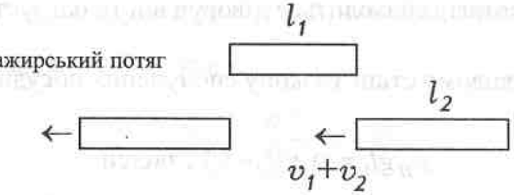
$$Q_л = Q_{кр} + Q_в \ , \qquad Q_л = \lambda m_1 + Q_в \ ,$$

звідси $$m_1 = \frac{Q_л - Q_в}{\lambda} = 0{,}13\ \text{кг} \ .$$

Кінцева маса льоду: $m_{л1} = m_л + m_1 = 0{,}13$ кг.

2 (27). Відносна швидкість потягів $v = v_1 + v_2$. Довжина вантажного потягу:

$$l_2 = vt = (v_1 + v_2)t \ . \qquad (1)$$

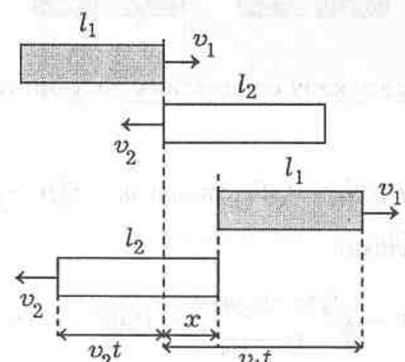


Визначімо час t_1, за який потяги розминуться. Відносно пасажирського потяга

$$t_1 = \frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2} \ .$$

З рисунка маємо:

$$x = -v_2 t_1 + l_2 \ , \ \text{або} \ \ x = v_1 t_1 - l_1 \ .$$



Скористаймось рівнянням (1):

$$x = -v_2 t_1 + (v_1 + v_2)t = -v_2 \frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2} + (v_1 + v_2)t =$$

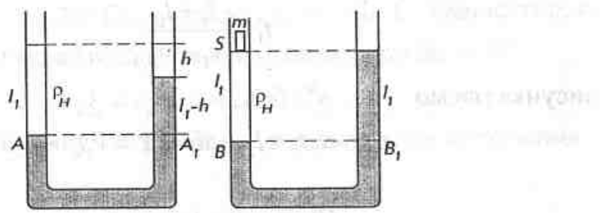
$$= -v_2 \frac{l_1 + (v_1 + v_2)t}{v_1 + v_2} + (v_1 + v_2)t = -\frac{v_2 l_1}{v_1 + v_2} + v_1 t \quad (2)$$

Точка розходження потягів знаходиться на відстані 180 м праворуч від точки зустрічі потягів (якщо б $x < 0$, це означало б, що точка розходження потягів знаходиться ліворуч від точки зустрічі).

3 (28). У початковому стані з закону сполучених посудин, тиски на рівні AA_1 рівні:

$$\rho_H g l_1 = \rho_в g(l_1 - h) \text{, звідси}$$

$$l_1 = \frac{\rho_в h}{\rho_в - \rho_H} \quad (1)$$



У кінцевому стані з закону сполучених посудин тиски на рівні BB_1 рівні:

$$\frac{mg}{S} + \rho_H g l_1 = \rho_в g l_1 \text{, звідси } m = S(\rho_в - \rho_H)l_1 \quad (2)$$

З (1) та (2) отримаймо:

$$m = S\frac{(\rho_в - \rho_н)\rho_в h}{\rho_в - \rho_н} = \rho_в hS = 0{,}4 \text{ кг}.$$

4 (29). Їдучи по горизонтальній дорозі, двигун виконує роботу по подоланню сил опору $A_{дв} = A_{оп}$, $A_{дв} = \eta Q = \eta m_n q$, де η – ККД двигуна.

$$A_{оп} = \mu mgS = A_{дв}\text{, де } \mu = 0{,}02 \text{ – коефіцієнт опору.}$$

Автомобіль рухається вгору. Двигун виконує роботу по подоланню сил опору, а також по збільшенню потенціальної енергії автомобіля $\Delta E = mgh_1$,

$$A_{дв} = A_{оп1} + mgh_1 = \mu mgS_1 + mgS_1 k_0 = \mu mgS,$$

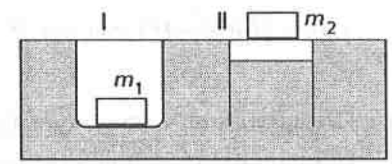
де $k_0 = 10$ м/км $= 0{,}01$ – ухил.

Тоді $$S_1 = \frac{\mu S}{\mu + k_0} = 4 \text{ км}.$$

Якщо автомобіль рухається вниз:

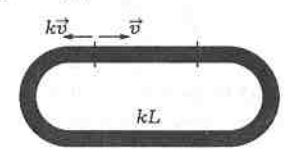
$$S_2 = \frac{\mu S}{\mu - k_0} = 12 \text{ км}.$$

5 (30). Як видно з рисунка в I випадку сила Архімеда більша, тобто $m_1 > m_2$.



1999

1 (31). Як видно з рисунка, довжина кола стадіона



$$S = L + kL.$$

2 (32). Нехай: $t_1 = 10$ хв, $t_2 = 40$ хв, t_3 – час, коли температура знову почне змінюватись, $\Delta T = 100\,^{\circ}\mathrm{C}$. Якщо потужність нагрівника P стала, тоді кількість теплоти, що йде на плавлення льоду

$$Q_{пл} = m_л \lambda = P t_1\,; \qquad (1)$$

кількість теплоти, що йде на нагрівання води від 0 до 100 °C:

$$Q_в = c_в (m_л + m_в)\Delta T = P(t_2 - t_1)\,; \qquad (2)$$

кількість теплоти, що йде на випаровування води:

$$Q = r(m_л + m_в) = P(t_3 - t_2)\,. \qquad (3)$$

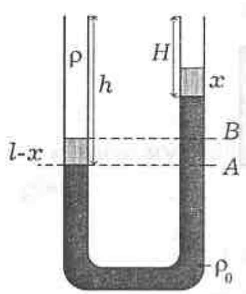
Поділімо (2) на (1) і отримаймо:

$$\frac{m_в}{m_л} = \frac{(t_2 - t_1)\lambda}{t_1 c_в \Delta T} - 1 = 1{,}4\,,$$

тоді поділивши (3) на (2):

$$t_3 = t_2 + \frac{r(t_2 - t_1)}{c_в \Delta T} = 202 \text{ хв}.$$

3 (33). У початковому стані (до потрапляння дерева) запишімо умову рівноваги (рівність тисків на рівні A випливає з закону сполучених посудин):



$$\rho g h = \rho_0 g(h - H), \text{ звідси } \rho = \rho_0 \frac{h - H}{h}. \qquad (1)$$

Потрапляння у воду куска дерева масою m еквівалентне доливанню води масою m, це випливає з закону Архімеда (вага дерева дорівнює вазі витісненої деревом води). Нехай l – довжина стовпа доданої води.

$$l = \frac{m}{\rho_0 S}\,, \qquad (2)$$

де S – площа поперечного перерізу трубки. Умова рівноваги в кінцевому стані – рівновага тисків на рівні B:

$$\rho(h - l + x)g = \rho_0(h - l + x - H + x)g\,. \qquad (3)$$

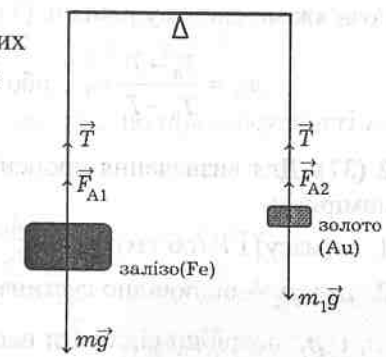
Розв'яжімо систему рівнянь (1–3), отримаймо:

$$l - x = \frac{mh}{(h + H)\rho_0 S}\,.$$

Тоді об'єм рідини, що вилилась, дорівнює:

$$V = (l - x)S = \frac{mh}{\rho_0 (h + H)}\,.$$

4 (34). Умова рівноваги рівноплечних терезів – рівність сил натягу ниток:



$$mg - \varrho_в g \frac{m}{\varrho_{Fe}} = m_1 g - \varrho_в g \frac{m_1}{\varrho_{Au}}\,.$$

Отже,

$$m_1 = m \frac{(\varrho_{Fe} - \varrho_в)\varrho_{Au}}{(\varrho_{Au} - \varrho_в)\varrho_{Fe}} = 590 \text{ г}.$$

5 (35). При рівномірному русі сила тяги автомобіля F дорівнює силі опору F_0.

$$F_T = F_0 = \alpha(m + M)g\,.$$

Тоді,

$$\eta = \frac{A_{кор}}{A_{затр}} = \frac{F_T v t_0}{q m_0}, \text{ звідси } v = \frac{\eta q m_0}{\alpha(m + M) g t_0} = 17{,}6 \text{ м/с}.$$

2000

1 (36). Між вулицею і кімнатою відбувається теплообмін. Кількість теплоти, що втрачає кімната за добу:

$$Q_1 = \alpha(T_0 - T_1)\,. \qquad (1)$$

Це закон теплообміну Ньютона (T_0 – температура в кімнаті, T_1 – температура на вулиці, a – коефіцієнт теплообміну). При спалюванні дров виділяється теплота:

$$Q_1 = \eta m_1 q \ , \qquad (2)$$

де η – коефіцієнт корисної дії печі, m_1 – маса дров, q – питома теплота згоряння дров. Якщо температура в кімнаті стала

$$Q_1 = Q_2 \text{, тобто } \alpha(T_0 - T_1) = \eta m_1 q \ . \qquad (3)$$

У другому випадку:

$$\alpha(T_0 - T_2) = \eta m_2 q \ . \qquad (4)$$

Розв'яжімо систему рівнянь (3) і (4), отримаймо:

$$m_2 = \frac{T_0 - T_2}{T_0 - T_1} m_1 \ , \text{ або } \ V_2 = \frac{T_0 - T_2}{T_0 - T_1} V_1 = 0{,}13 \text{ м}^3 \ .$$

2 (37). Для визначення процентного вмісту Попелюшці потрібно виміряти:

1. m (масу) і V (об'єм) суміші;
2. ρ_1 і ρ_2 – відповідно густина кукурудзи і вівса. (Для визначення ρ_1 і ρ_2 потрібно відібрати невелику кількість чистої кукурудзи і вівса й визначити $\rho_1 = m_{10}/V_{10}$; $\rho_2 = m_{20}/V_{20}$). Об'єм суміші у мішку дорівнює сумі об'ємів кукурудзи – V_1 і вівса – V_2:

$$V = V_1 + V_2 \ . \qquad (1)$$

Маса суміші:

$$m = m_1 + m_2 = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 \ . \qquad (2)$$

Розв'яжімо систему рівнянь (1) і (2):

$$V_1 = \frac{m - \rho_2 V}{\rho_1 - \rho_2} \ , \ V_2 = \frac{m - \rho_1 V}{\rho_2 - \rho_1} \ ,$$

звідси $$\alpha_1 = \frac{V_1}{V} = \frac{\frac{m}{V} - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \ ; \ \alpha_2 = \frac{V_2}{V} = \frac{\frac{m}{V} - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \ .$$

Якщо $V \neq V_1 + V_2$, Попелюшці потрібно розділити всю суміш.

3 (38). Розгляньмо ділянку водосховища. Загальний час руху по водосховищу (в обидва боки) $t_1 = 2l/v_1$. Якщо у водосховищі вода рухатиметься зі швидкістю v_0, тоді загальний час руху:

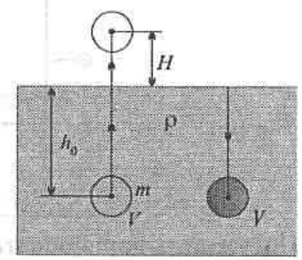
$$t_2 = \frac{l}{v_1 + v_0} + \frac{l}{v_1 - v_0} = \frac{2lv_1}{v_1^2 - v_0^2} \ .$$

Знайдімо

$$t_2 - t_1 = 2l\left(\frac{v_1}{v_1^2 - v_0^2} - \frac{1}{v_1}\right) = \frac{2lv_0^2}{v_1(v_1^2 - v_0^2)} > 0 \ .$$

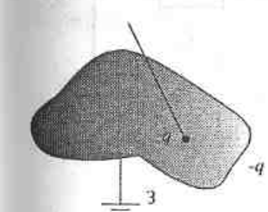
Зрозуміло, що $v_1 > v_0$, $t_2 > t_1$ – це означає, що при відсутності водосховища, час на дорогу більший.

4 (39). Робота над системою батискаф – вода дорівнює зміні потенціальної енергії системи. Батискаф піднімаючись, збільшує свою потенціальну енергію на $mg(h_0 + H)$. Вода, опускаючись з поверхні, зменшує свою потенціальну енергію на $\rho V g h_0$.



$$A = mg(h_0 + H) - \rho V g h_0 = 196 \text{ кДж} \ .$$

5 (40). Надати однаковий заряд можна тільки порожнистим провідним тілам. Усі провідні тіла поставмо на ізолюючі підставки і з'єднаймо їх провідниками з Землею (заземлімо). Візьмімо невелике заряджене тіло і внесімо його всередину заземленого провідника, і в цей момент роз'єднаймо заземлення. На провіднику внаслідок явища електростатичної індукції наведеться з Землі заряд, що дорівнює нашому, але протилежний йому за знаком. Повторімо ці дії з іншими тілами.



9-й клас

1993

1 (41). Перевівши перемикач в положення *I*, отримуємо коло (рис. 1), опір якого дорівнює:

$$R_I = \frac{R_1 R_{234}}{R_1 + R_{234}} = \frac{R_1 (R_2 + R_{34})}{R_1 + R_2 + R_{34}} = \frac{R_1 \left(R_2 + \dfrac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right)}{R_1 + R_2 + \dfrac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = \frac{3}{5} R \ .$$

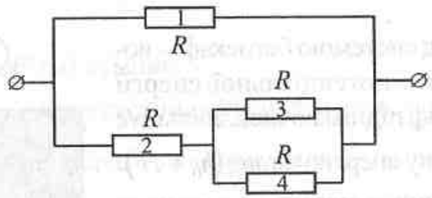


Рис. 1.

Потужність дорівнюватиме:

$$P_I = \frac{U^2}{R_I} = \frac{5U^2}{3R_I} \ . \qquad (1)$$

Перевівши перемикач у положення *II*, отримуємо коло (рис. 2), опір якого дорівнює:

$$R_{II} = \frac{R}{3} \ .$$

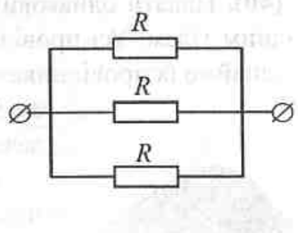


Рис. 2.

Потужність дорівнюватиме:

$$P_{II} = \frac{U^2}{R_{II}} = \frac{3U^2}{R} \ . \qquad (2)$$

Поділімо (2) на (1):

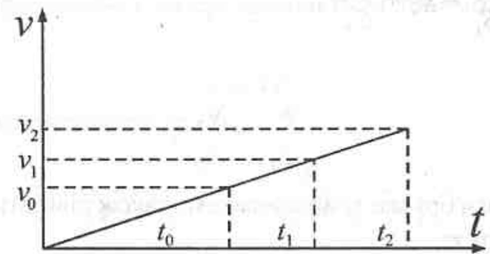
$$\frac{P_{II}}{P_I} = 1{,}8 \ .$$

Потужність збільшиться у 1,8 разів.

2 (42). Визначімо довжину передостаннього вагона:

$$l = v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2} \ , \qquad (1)$$

де v_0 – швидкість передостаннього вагона на момент початку проходження повз спостерігача.



$$v_0 = a t_0 \ , \qquad (2)$$

де t_0 – час руху потяга без двох останніх вагонів.

Довжина останнього вагона:

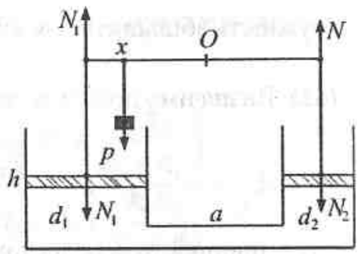
$$l = (v_0 + a t_1) t_2 + \frac{a t_2^2}{2} \ . \qquad (3)$$

Прирівняймо (1) та (3):

$$v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2} = (v_0 + a t_1) t_2 + \frac{a t_2^2}{2} \ , \text{ звідси } t_0 = \frac{v_0}{a} = \frac{2 t_1 t_2 + t_2^2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} \ ,$$

отже $$t = t_0 + t_1 + t_2 = \frac{t_2^2 + 2 t_1 t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} + t_1 + t_2 = 90 \text{ с} \ .$$

3 (43). Визначімо тиск першого поршня $p_1 = \dfrac{\rho_n h S_1 g}{S_1} = \rho_n g h$. Як відомо, поршні мають однакову товщину, отже й тиски вони створюватимуть однакові: $p_1 = p_2$.



Поршні знаходяться на однакових рівнях. Закріпімо вантаж на відстані x від середини бруска, щоб рівновага не порушилася. Тиски, що створюють поршні знову однакові:

$$p_1 + \frac{N_1}{S_1} = p_2 + \frac{N_2}{S_2} ,$$

звідси

$$\frac{N_1}{S_1} = \frac{N_2}{S_2} . \qquad (1)$$

Умова рівноваги бруска зумовлюватиме також рівність моментів сил відносно точки x:

$$N_1\left(\frac{d_1/2 + d_2/2 + a}{2} - x\right) = N_2\left(\frac{d_1/2 + d_2/2 + a}{2} + x\right). \qquad (2)$$

Поділімо (2) на (1):

$$S_1\left(\frac{d_1 + d_2 + 2a}{4} - x\right) = S_2\left(\frac{d_1 + d_2 + 2a}{4} + x\right),$$

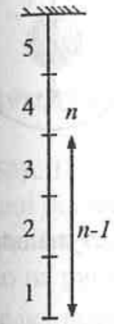
звідси $$x = \frac{(S_1 - S_2)(d_1 + d_2 + 2a)}{4(S_1 + S_2)} .$$

Врахуймо, що $S \sim d^2$, тоді:

$$x = \frac{(d_1^2 - d_2^2)(d_1 + d_2 + 2a)}{4(d_1^2 + d_2^2)} = 0{,}14\ \text{м} .$$

Отже, вантаж потрібно закріпити відстані x = 0,14 м ліворуч від середини бруска.

4 (44). Вважаймо, що пружинки самі себе не розтягують. Тоді n пружинку розтягує $(n-1)$ пружинка.



$$\Delta x_n = \frac{(n-1)mg}{k} .$$

Розтяг ланцюга складається з видовжень окремих пружинок:

$$\Delta l = \Delta x_5 + \Delta x_4 + \Delta x_3 + \Delta x_2 = \frac{10mg}{k} = 10^{-2}\ \text{м} .$$

$$\Delta l = 10\ \text{см} .$$

5 (45). Втрачену енергію в лазері відводять за допомогою водяного охолодження

$$Q = kt\rho c\Delta T . \qquad (1)$$

ККД лазера визначатиметься:

$$\eta = \frac{P_c t}{P_c t + Q} = \frac{P_c t}{P_c t + kt\rho c(T_2 - T_1)} ,$$

звідси $P_c = \dfrac{\eta k\rho c(T_2 - T_1)}{1-\eta}$ – середня корисна потужність лазера.

$N = f$ – кількість імпульсів за t_3 = 1 с. $W_1 = \dfrac{P_c t_3}{N} = \dfrac{P_c t_3}{f}$ – енергія одного імпульсу.

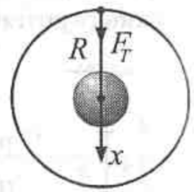
$$P_i = \frac{W_1}{t_0} = \frac{\eta k\rho c(T_2 - T_1)t_1}{(1-\eta)t_0 f} = 4{,}2\cdot 10^7\ \text{Вт} .$$

1994

1 (46). Супутник рухається по колу. Запишімо другий закон Ньютона у проекції на вісь OX: $F_T = ma_д$, звідси:

$$\gamma\frac{mM_З}{R^2} = m\frac{v^2}{R} = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} , \text{ або } R^3 = \gamma\frac{M_З T^2}{4\pi^2} ,$$

$$\frac{R^3}{R_3^3} = \gamma\frac{M_3 T^2}{4\pi^2 R_3^3} = \frac{gT^2}{4\pi^2 R_3},$$



отже, $\frac{R^3}{R_3^3} = \sqrt[3]{\frac{gT^2}{4\pi^2 R_3}} = 6{,}6$,

де $T = 24 \cdot 3600$ с – період обертання супутника.

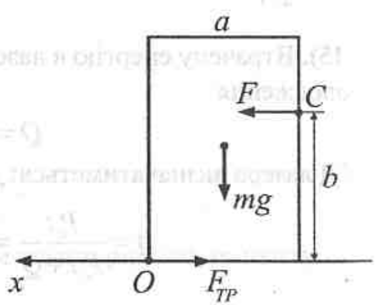
2 (47). Шафа перебуватиме в рівновазі з точки зору поступального руху, якщо силу F прикласти до точки C.

OX: $F = F_{тр} = \mu mg$.

Запишімо умову рівноваги для обертального руху відносно вісі O:

$Fb = mg\frac{a}{2}$, тому $\mu mgb = mg\frac{a}{2}$,

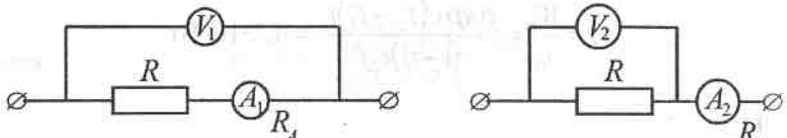
звідси $\mu = \frac{a}{2b}$.



3 (48). Запишімо закон Ома для першого випадку:

$$R + R_A = \frac{U_1}{I_1}, \tag{1}$$

де U_1 – напруга джерела.



У другому випадку напруга на амперметрі $U_{A2} = U_1 - U_2$. Знайдімо опір амперметра:

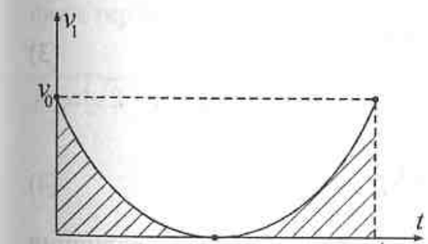
$$R_A = \frac{U_1 - U_2}{I_2}. \tag{2}$$

Розв'язавши систему рівнянь (1) та (2), отримаймо:

$$R = \frac{U_1}{I_1} - \frac{U_1 - U_2}{I_2} = 90\ \text{Ом}.$$

4 (49). Дивись розв'язок задачі 9.

5 (50). Шлях пройдений першим тілом за час t_1 чисельно дорівнює площі під графіком v_1 від t (на рисунку заштриховано). Цю площу знайдімо як різницю площі прямокутника $v_0 t_1$ й площі еліпса (півколо на рисунку є частиною еліпса, тому що розмірність по вісях графіка різна. Площа еліпса $S = \pi ab$, де a та b – велика та мала півосі еліпса)



$$\frac{1}{2}\pi v_0 \frac{t_1}{2} \tag{1}$$

– шлях пройдений першим тілом дорівнює шляху пройденому другим тілом

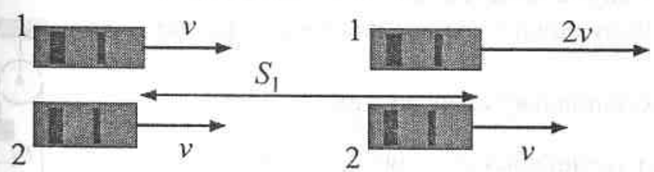
$$S_1 = S_2 = v_2 t_1. \tag{2}$$

Розв'язавши рівняння (1) та (2), отримуємо:

$$v_0 = \frac{v_2}{(1 - \pi/4)}.$$

1995

1 (51). Розгляньмо систему відліку, прив'язану до Землі (рис. 1).



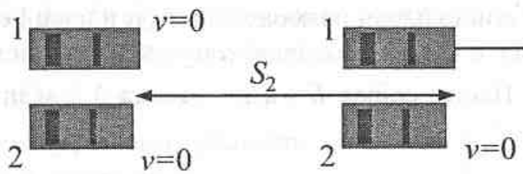
Зміна кінетичної енергії першого автомобіля:

$$\Delta K_{11} = \frac{4mv^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{3mv^2}{2}\ . \qquad (1)$$

Додаткова робота двигуна автомобіля:

$$A_1 = FS_1 = F\frac{(2v)^2 - v^2}{2a} = \frac{3}{2}F\frac{v^2}{a}\ . \qquad (2)$$

У системі відліку, прив'язаній до другого автомобіля:



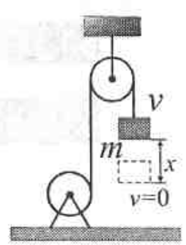
$$\Delta K_{12} = \frac{mv^2}{2}. \qquad (3)$$

Додаткова робота двигуна буде:

$$A_2 = FS_2 = \frac{1}{2}F\frac{v^2}{a}\ . \qquad (4)$$

Зміна кінетичної енергії як і сама кінетична енергія – величини відносні. Тому в різних системах відліку матимемо різні зміни кінетичної енергії (порівняйте (1) та (3)). Це пояснюється так: у різних системах відліку двигун виконує різну роботу (порівняйте (2) та (4)), відповідно і зміна кінетичної енергії – різна. Палива в обох випадках згорятиме однакова кількість, оскільки робота теж відносна величина.

2 (52). Скористаймось законом збереження енергії. До зупинки тіло мало кінетичну енергію $\frac{mv^2}{2}$ і потенціальну енергію mgx.



У момент зупинки вся енергія перейде в енергію деформації троса.

$$\frac{mv^2}{2} + mgx = \frac{kx^2}{2}\text{, звідки } x = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{kv^2}{mg^2}}\right).$$

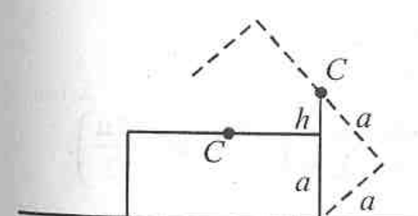
Максимальна сила натягу троса в момент зупинки буде:

$$F_T = kx = mg\left(1 + \sqrt{1 + \frac{kv^2}{mg^2}}\right)$$

– у момент зупинки сила натягу троса є більшою від сили тяжіння, оскільки тіло не перебуває у стані рівноваги.

3 (53). Для оцінки вважатимемо, що вся потенціальна енергія системи $mgh = mga\left(\sqrt{2} - 1\right)$ перетворюється у внутрішню внаслідок дії сили тертя. При ковзанні табуретки по підлозі $A_{тр} = \mu mgx$, отже

$mga\left(\sqrt{2} - 1\right) = \mu mgx$, звідси отримаймо $x = \frac{a\left(\sqrt{2} - 1\right)}{\mu}$.



Проведімо точнішу оцінку (для цього потрібні додаткові знання, які виходять за межі шкільного курсу в 9 класі). Скористаймось законом збереження енергії й визначімо кутову швидкість табуретки в момент удару:

$$mgh = \frac{I_0\omega^2}{2}\text{, звідси } \omega^2 = \frac{2mgh}{I_0}\ . \qquad (1)$$

$$h = a\left(\sqrt{2} - 1\right),$$

$$I_0 = I_C + 2ma^2 = \frac{4}{12}ma^2 + 2ma^2 = \frac{7}{3}ma^2\ . \qquad (1a)$$

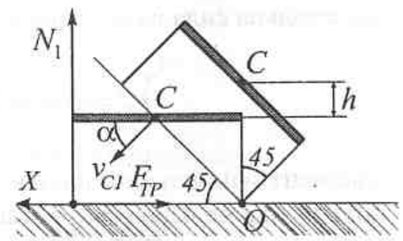
$$\omega^2 = \frac{6\left(\sqrt{2} - 1\right)g}{7a}\ . \qquad (2)$$

У момент удару виникне ударна сила реакції N_1, момент якої $2aN_1$ гальмуватиме обертання. Запишімо закон динаміки для обертального руху через зміну моменту імпульсу тіла:

$$M\Delta t = \Delta L ,$$

звідси $\quad 2aN_1\Delta t = I_0\omega \quad$ (3)

Запишімо другий закон Ньютона для поступального руху в момент удару:



$$F_{mp1}\Delta t = \mu N_1 \Delta t = \Delta p = m(v_{C1X} - v_{C2X}) \qquad (4)$$

$$v_{C1X} = v_{C1}\cos\alpha = \omega a\sqrt{2}\cos\alpha . \qquad (5)$$

З (3) отримаймо: $\quad N_1\Delta t = \dfrac{I_0\omega^2}{2a}$.

Підставмо (5) в (4), врахувавши (1а):

$$v_{C1X} - \frac{\mu I_0\omega}{2am} = v_{C2X} =$$

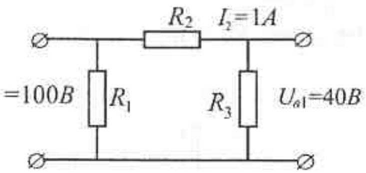
$$= \omega a\sqrt{2}\cos\alpha - \frac{\mu I_0\omega}{2am} = \omega\left(a\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\mu I_0}{2am}\right) = \frac{\omega a}{2}\left(\sqrt{6} - \frac{7\mu}{3}\right).$$

При $\mu \geq \dfrac{3\sqrt{6}}{7}$, $v_{C2X} = 0$ – табуретка не пересунеться. При $\mu < \dfrac{3\sqrt{6}}{7}$:

$$S = \frac{v_{C2X}^2}{2\mu g} = \frac{\omega^2 a^2}{2\mu g}\left(\sqrt{6} - \frac{7}{3}\mu\right)^2 = \frac{3\left(\sqrt{6} - 7\mu/3\right)^2 a\left(\sqrt{2} - 1\right)}{7\mu} .$$

4 (54). У першому випадку $I_2 = I_3$, тоді:

$$R_3 = \frac{U_{в1}}{I_2} = 40\ \text{Ом} .$$

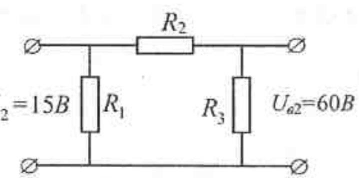


$$U_1 = U_2 + U_3 = U_2 + U_{в1}, \text{ звідси } U_2 = U_1 - U_{в1} .$$

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1 - U_{в1}}{I_2} = 60\ \text{Ом} .$$

У другому випадку $U_{в2} = U_2 + U_{R2}$, звідси $U_{R2} = -U_2 + U_{в2}$.

$$I_2 = \frac{U_{R_2}}{R_2} = \frac{-U_2 + U_{в2}}{R_2} = I_{R_1} = 0{,}75\ \text{А} .$$



$$R_1 = \frac{U_2}{I_{R_1}} = 20\ \text{Ом} .$$

Отже, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 60$ Ом, $R_3 = 40$ Ом.

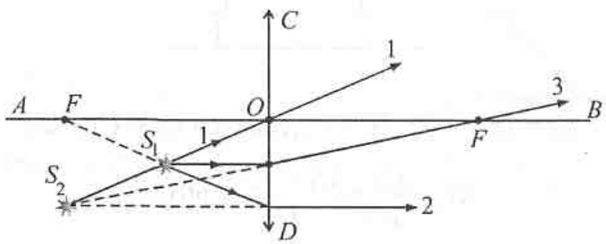
5 (55). Побудова:

– проведімо промінь 1 через S_2S_1, він перетне AB в оптичному центрі лінзи O;

– проведімо лінію лінзи CD як перпендикулярну до AB;

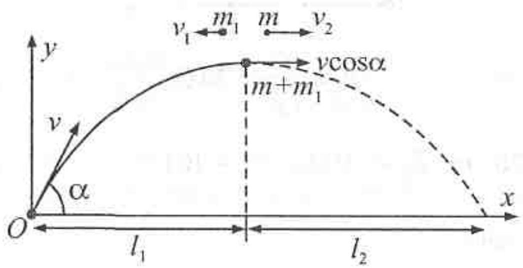
– проведімо промінь 3 паралельно AB до лінзи. Після лінзи промінь заломлюватиметься так, що його продовження пройде через S_2. Його перетин з AB є фокусом лінзи (точка F). Отже, лінза збірна. Позначімо лінзу;

– проведімо промінь 2 так, щоб він за лінзою йшов паралельно AB, а його продовження через S_2, а його перетин з AB дасть положення іншого фокуса.



1996

1 (56). Визначімо час руху людини до верхньої точки з умови, що швидкість по осі OY ($v_y = v\sin\alpha - gt$) у верхній точці дорівнює нулеві: $t = \dfrac{v\sin\alpha}{g}$.



Тоді: $$l_1 = v_x t = v\cos\alpha\frac{v\sin\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{2g}.$$

Запишімо закон збереження імпульсу по осі OX при киданні тіла (по OX зовнішні сили відсутні):

$$(m+m_1)v\cos\alpha = mv_2 - m_1v_1, \text{ звідси } v_2 = \frac{(m+m_1)v\cos\alpha + m_1v_1}{m}.$$

Визначімо l_2, враховуючи, що час падіння вниз, дорівнює часу руху вверх:

$$l_2 = v_2 t = \frac{(m+m_1)v\cos\alpha + m_1v_1}{m}\cdot\frac{v\sin\alpha}{g}.$$

Знайдімо дальність стрибка:

$$l = l_1 + l_2 = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g} + \frac{m_1(v\cos\alpha + v_1)v\sin\alpha}{mg}.$$

2 (57). Маса суміші $m = m_1 + m_2$ дорівнює сумі мас складових. Поділімо це рівняння на m:

$$1 = \frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad (1)$$

де α_1 та α_2 – концентрація речовин у суміші.

Вважаймо, що об'єм суміші дорівнює сумі об'ємів складових суміші:

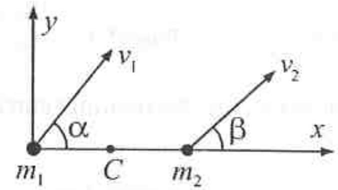
$$V = V_1 + V_2 = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} = \frac{\alpha_1 m}{\rho_1} + \frac{\alpha_2 m}{\rho_2}. \qquad (2)$$

Розв'яжімо систему рівнянь (1), (2) та отримаймо:

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1(\rho_2V - m)}{m(\rho_2 - \rho_1)},\quad \alpha_2 = \frac{\rho_2(m - \rho_1V)}{m(\rho_2 - \rho_1)}.$$

3 (58). Визначімо співвідношення між кутами з умови, що відстань між кульками незмінна. Це означає, що швидкості кульок по вісі OX однакові $v_1\cos\alpha = v_2\cos\beta$, звідси

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{v_2}{v_1}.$$



Для визначення максимальної висоти центра мас визначімо проекцію імпульсу системи на вісь OY:

$$(m_1+m_2)v_{cY}=m_1v_1\sin\alpha+m_2v_2\sin\beta\ ,$$

звідси
$$v_{cY}=\frac{m_1v_1\sin\alpha+m_2v_2\sin\beta}{m_1+m_2}\ .$$

Рух центра мас по OY – рівноприскорений. У верхній точці його швидкість дорівнюватиме нулеві. Знайдімо максимальну висоту підйому:

$$h=\frac{v_{cY}^2}{2g}=\frac{(m_1v_1\sin\alpha+m_2v_2\sin\beta)^2}{2g(m_1+m_2)^2}\ .$$

4 (59). Можливі два варіанти з'єднання трьох опорів у „чорній скриньці".

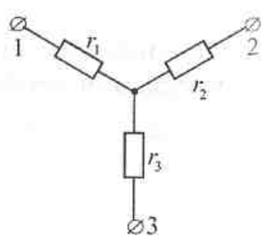
I варіант – з'єднання зіркою.

$$r_1+r_2=R_{12}\ , \qquad (1)$$

$$r_2+r_3=R_{23}\ , \qquad (2)$$

$$r_3+r_1=R_{31}\ . \qquad (3)$$

Визначімо опори, для цього з рівняннями (1), (2), (3) виконаймо наступні дії:



(1) + (3) – (2): $\quad r_1=\dfrac{R_{12}+R_{13}-R_{23}}{2}=1\text{ Ом}$,

(1) + (2) – (3): $\quad r_2=\dfrac{R_{12}+R_{23}-R_{23}}{2}=\dfrac{1}{2}\text{ Ом}$,

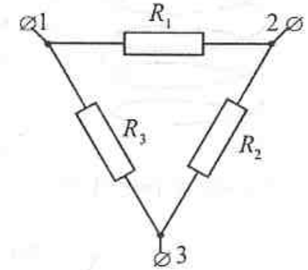
(2) + (3) – (1): $\quad r_3=\dfrac{R_{23}+R_{13}-R_{12}}{2}=\dfrac{1}{3}\text{ Ом}$.

II варіант – з'єднання трикутником.

$$R_{12}=\frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}=r_1+r_2\ , \qquad (4)$$

$$R_{23}=\frac{R_2(R_3+R_1)}{R_1+R_2+R_3}=r_2+r_3\ , \qquad (5)$$

$$R_{13}=\frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3}=r_1+r_3\ . \qquad (6)$$



Додаймо рівняння (4), (5), (6):

$$r_1+r_2+r_3=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1+R_2+R_3}\ . \qquad (7)$$

Віднімімо (7) – (4):

$$r_3=\frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}\ , \qquad (8)$$

(7) – (5): $\quad r_1=\dfrac{R_3R_1}{R_1+R_2+R_3}\ , \qquad (9)$

(7) – (6): $\quad r_2=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}\ . \qquad (10)$

Знайдімо такий вираз:

$$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3} \qquad (11)$$

Поділімо (11) на (8):

$$\frac{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}{r_3}=R_1=3\text{ Ом}\ .$$

Поділімо (11) на (9):

$$\frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_1} = R_2 = 2\ \text{Ом}.$$

Поділімо (11) на (10):

$$\frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_2} = R_3 = 1\ \text{Ом}.$$

5 (60). Розгляньмо рух по спіралі як два незалежні рухи.

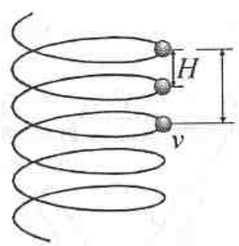


Рис. 1.

I – рух по колу у горизонтальній площині (рис. 2) під дією горизонтальної складової сили N_1 реакції опори. Запишімо другий закон Ньютона для руху по колу в проекції на вісь *OX*:

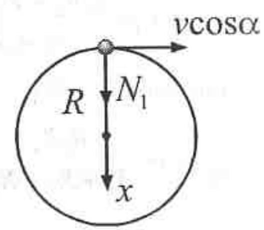


Рис. 2.

$$N_1 = \frac{mv^2 \cos^2 \alpha}{R}. \qquad (1)$$

II – рух по похилій площині, яка утворюється при розгортання спіралі в пряму (рис. 3).

Складова сили реакції у вертикальній площині:

$$N_2 = mg\cos\alpha \qquad (2)$$

$$\cos\alpha = \frac{2\pi R}{\sqrt{4\pi R^2 + H^2}}. \qquad (3)$$

Визначімо швидкість у потрібній точці з закону збереження енергії (рис.1):

$$mgHn = \frac{mv^2}{2}, \text{ звідси } v^2 = 2gHn. \quad (4)$$

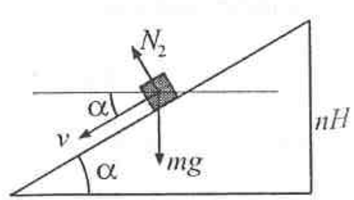


Рис. 3

Визначімо повну силу реакції опори *N*, яка дорівнює силі тиску на гірку *P* через складові N_1, N_2:

$$P = N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \frac{\sqrt{(2mg\pi R)^2(4\pi^2R^2 + H^2) + (2mgnH \cdot 4\pi^2 R)^2}}{4\pi^2R^2 + H^2}.$$

1997

1 (61). Нехай t_0 – час проходження потяга без двох останніх вагонів. Тоді, довжина останнього вагона:

$$l = \frac{a(t_0 + t_1 + t_2)^2}{2} - \frac{a(t_0 + t_1)^2}{2}. \qquad (1)$$

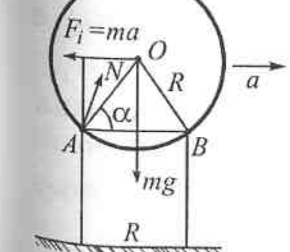
Довжина двох останніх вагонів:

$$2l = \frac{a(t_0 + t_1 + t_2)^2}{2} - \frac{at_0^2}{2}. \qquad (2)$$

Розв'яжімо систему рівнянь (1), (2) та отримаймо час запізнення пасажира:

$$t_0 = \frac{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1^2}{2(t_1 - t_2)}.$$

2 (62). Перейдімо в систему відліку, що рухається праворуч з прискоренням *a* (неінерціальна система відліку). Тоді на цистерну діятимуть сили реакції опори *N* та інерції $F_i = ma$ (сила інерції напрямлена проти прискорення системи відліку). Цистерна впаде з підставки викочуючись, тобто обертаючись відносно точки *A*. У початковий момент викочування вся сила реакції опори зосереджена в точці *A* (раніше була розподілена по всій опорі) і моменту сил відносно осі обертання, що проходить через точку *A* не створює. Для цього моменту запишімо умову рівноваги цистерни відносно вісі *A*:



$$mg\frac{R}{2} = maR\sin\alpha\ ,$$

звідси $a = \dfrac{g}{2\sin\alpha} = \dfrac{g}{\sqrt{3}} = 5{,}8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$

(враховано, що $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, оскільки $\alpha = 60°$).

3 (63). Спочатку маємо:

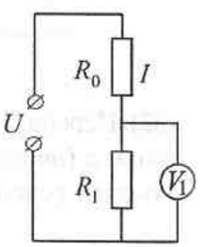
$$R_0 = \frac{U - U_1}{I}\ , \qquad (1)$$

$$I = \frac{U_1}{R_1} \qquad (2)$$

(вважаймо, що вольтметр ідеальний $R_V = \infty$).

$$R_0 = \frac{(U - U_1)}{U_1} R_1\ . \qquad (3)$$

Після нагрівання системи, якщо опір терморезистора зменшується (знак „–" перед ΔR), тоді струм збільшується (знак „+" перед α), і навпаки.



$$R_1 \mp \Delta R = \frac{U - (1 \pm \alpha) I R_0}{(1 \pm \alpha) I}\ .$$

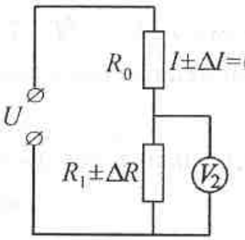
Врахуймо (1), (2), (3) та отримаймо:

$$\mp \Delta R = \frac{U R_1 / U_1 - (1 \pm \alpha)(U - U_1) R_1 / U_1}{(1 \pm \alpha)} - R_1 =$$

$$= \frac{U}{U_1} R_1 (1 - (\pm\alpha)) - \frac{U}{U_1} R_1 = -\frac{U}{U_1}(\pm\alpha) R_1$$

(враховано, що $\dfrac{1}{1 \pm \alpha} \cong 1 - (\pm\alpha)$ при $\alpha << 1$), отже

$$\Delta R = \frac{U}{U_1}\alpha R_1 = 200\ \text{Ом}\ .$$



Опір терморезистора може бути 200 Ом або 600 Ом.

4 (64). Умова рівноваги при плаванні у воді (рис.1):

$$mg = \rho_в g V_0\ , \qquad (1)$$

V_0 – об'єм зануреної частини бруска.

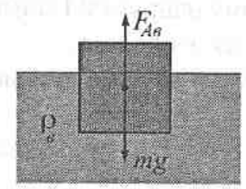


Рис. 1.

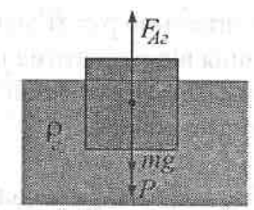


Рис. 2.

Умова рівноваги при плаванні у гліцерині (рис. 2):

$$mg + P = \rho_г g V_0\ . \qquad (2)$$

Розв'яжімо систему рівнянь (1), (2) та отримаймо вагу бруска:

$$P_0 = mg = P\frac{\rho_в}{\rho_г - \rho_в} = 50\ \text{Н}\ .$$

5 (67). Енергія, яку отримує азот для випаровування ($Q_1 = m_1 r_1 = \rho_1 V_1 r_1$), поступає крізь стінки посудини Дюара завдяки теплообміну з навколишнім середовищем. Ця енергія, за законом Ньютона для теплообміну, прямопропорційна різниці температур навколишнього середовища й азоту $(T - T_1)$ та часу проходження теплообміну $Q_2 = \alpha(T - T_1)t_1$ (α – коефіцієнт теплопередачі). Тоді рівняння теплового балансу матиме вигляд:

$$\rho_1 V_1 r_1 = \alpha(T - T_1)t_1 \ . \qquad (1)$$

У випадку плавлення льоду:

$$m_2 \lambda_2 = \alpha(T - T_2)t_2 \ , \qquad (2)$$

де T_2 – температура плавлення льоду.

Розв'яжімо систему рівнянь (1), (2) та отримаймо шуканий час:

$$t_2 = \frac{m_2 \lambda_2 (T - T_1)t_1}{\rho_1 V_1 r_1 (T - T_2)} = 5{,}1 t_1 \ .$$

1998

1 (66). Розгляньмо рух м'яча у зворотньому напрямку. Найменший кут кидання відповідатиме найменшому куту падіння.

З рис. 1 знайдімо найменший кут, при якому м'яч проходитиме через баскетбольне кільце:

$$\sin\alpha = \frac{2r}{4r} = 0{,}5 \text{, звідси } \alpha = 30° \ .$$

Рух по OX рівномірний:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = v_x \ , \qquad (1)$$

$$l = v_{0x} t = v_0 t \cos\alpha \ . \qquad (2)$$

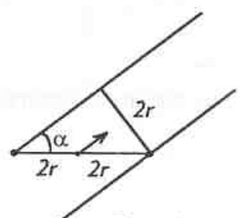


Рис. 1.

Рух по OY рівноприскорений:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt \ , \qquad (3)$$

$$h = H + v_0 \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \ . \qquad (4)$$

З (2) визначімо час польоту t:

$$t = \frac{l}{v_0 \cos\alpha} \ . \qquad (5)$$

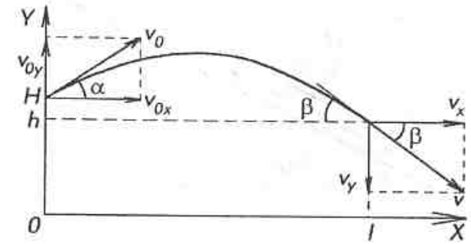


Рис. 2.

Визначімо кінцеву швидкість по OY. Підставмо (5) у (3):

$$v_y = v_0 \sin\alpha - g\frac{l}{v_0 \cos\alpha} < 0 \ .$$

Знайдімо кут кидання м'яча баскетболістом:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{gl}{v_0^2 \cos^2\alpha} - \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} = \frac{gl}{v_0^2 \cos^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha \ . \qquad (6)$$

Підставмо (5) у (4) і отримаймо:

$$\frac{gl}{v_0^2 \cos^2\alpha} = \frac{2(l\operatorname{tg}\alpha + H - h)}{l} \ . \qquad (7)$$

З рівностей (7), (6) отримаймо:

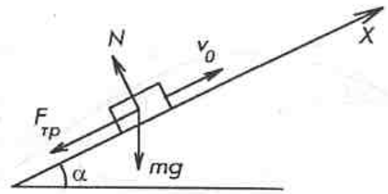
$$\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha + 2\frac{H-h}{l} - \operatorname{tg}\alpha = \frac{2(H-h)}{l} + \operatorname{tg}\alpha \ .$$

2 (67). Брусок лежить на похилій площині. Визначімо прискорення бруска при русі вгору, для цього використаймо другий закон Ньютона:

$$ma = -\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha \ ,$$

отже, $a_x = -g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$,

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}577 < \mu$$



Знайдімо час руху з рівняння:

$$v_x = v_0 + a_x t \text{, звідси } 0 = v_0 - g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)t,$$

отже, $$t_1 = \frac{v_0}{g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}.$$

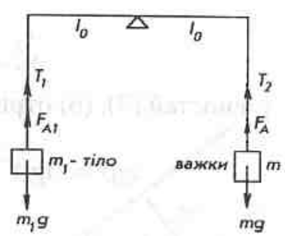
Якщо початкова швидкість v_0 напрямлена вниз, тоді:

$$t_2 = \frac{v_0}{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

3 (68). Якщо терези знаходяться у рівновазі, то $T_1 = T_2$:

$$m_1 g - F_{A1} = mg - F_A,$$

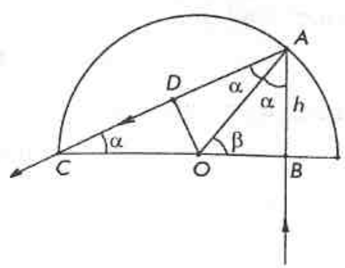
$$m_1 g - \frac{m_1}{\rho_1}\rho_3 g = mg - \frac{m}{\rho_2}\rho_3 g.$$

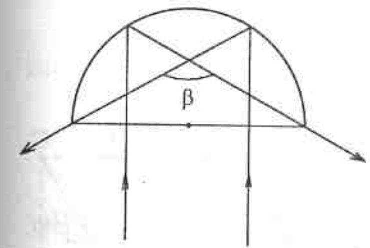


Знайдімо дійсну масу зваженого на терезах у повітрі тіла:

$$m_1 = m\frac{1-\rho_3/\rho_2}{1-\rho_3/\rho_2} = \frac{(\rho_2-\rho_3)\rho_1}{(\rho_1-\rho_3)\rho_2}.$$

4 (69). З ΔOAB: $h = R\cos\alpha$.
З ΔCBA: $h = 2R\cos\alpha\sin\alpha$.
$2R\cos\alpha\sin\alpha = r\cos\alpha$, звідси випливає, що $\sin\alpha = 1/2$. $\alpha = 30°$.

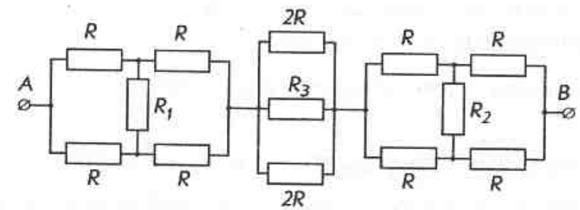




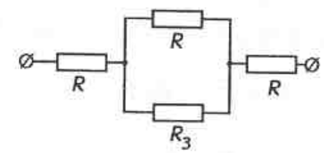
Найбільший кут розходження променів

$$\beta = 4\alpha = 120°.$$

5 (70). Еквівалентна схема кола:



З міркувань симетрії резистори R_1 і R_2 можна викинути.



Визначімо опір одиниці довжини провідника:

$$r = \frac{R_0}{3(2\pi l + 2l)} = \frac{R_0}{6l(\pi+1)},$$

де l – радіус кола.
Знайдімо опори R, R_3:

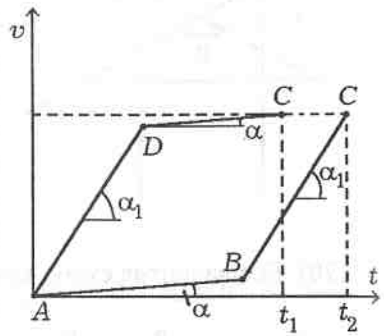
$$R = r\frac{\pi l}{2} = \frac{\pi R_0}{12(\pi+1)}, \quad R_3 = 2rl = \frac{R_0}{3(\pi+1)}.$$

Тоді опір схеми:

$$R_x = 2R + \frac{RR_3}{R+R_3} = R_0\frac{2\pi(\pi+6)}{12(\pi+1)(\pi+4)} = 0{,}67\ \text{Ом}.$$

1999

1 (71). Розв'яжімо задачу графічно для випадку бусинок, що ковзають по дротинах без тертя (щоб не розраховувати втрати швидкості на ділянках спряження). Побудуймо для обох бусинок графіки швидкості залежно від часу. Кінцеві швидкості однакові (це випливає з закону збереження енергії), а площі під графіком дорівнюватимуть шляху, пройденому кожним тілом, тому зрозуміло, що $t_1 < t_2$.



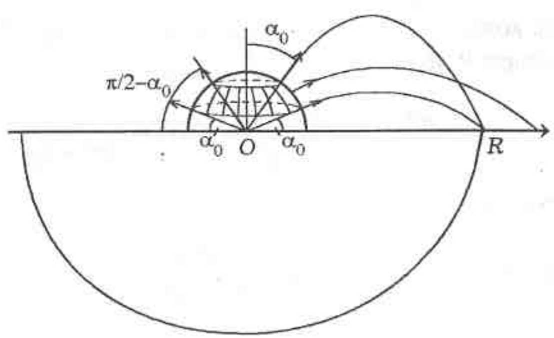
2 (72). За межі ямки потраплять уламки, що вилітають під кутами від α_0 до $(\pi/2-\alpha_0)$, тобто через сферичний сегмент площею (див. рис.):

$$S = 2\pi(\sin(\pi/2-\alpha_0)-\sin\alpha_0)R^2 \ . \qquad (1)$$

Тоді маса уламків, що вилетіли, буде

$$m = M\frac{S}{4\pi R^2}, \qquad (2)$$

де $4\pi R^2$ – площа сфери.



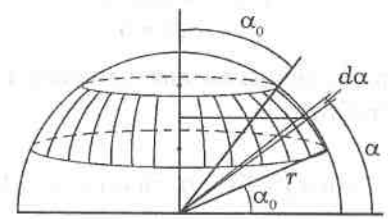
Визначімо α_0 з рівняння $R = \dfrac{v^2\sin 2\alpha_0}{g}$, звідси

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{Rg}{v^2} \ . \qquad (3)$$

Зрозуміло, що розглядається випадок $Rg < v^2$.

Врахувавши (1–3), одержимо:

$$m = \frac{M}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{Rg}{v^2}\right)-\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{Rg}{v^2}\right)\right).$$



Розрахуймо площу сферичного сегменту. Виберімо елемент поверхні у вигляді колової смужки шириною $r d\alpha$. Площа цього елементу: $dS = 2\pi r^2\cos\alpha d\alpha$. Тоді площа сферичного сегменту:

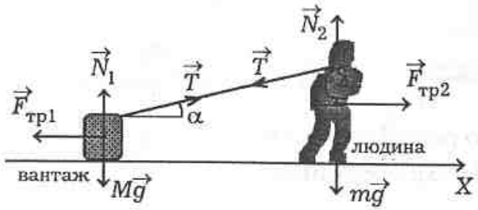
$$S = \int_{\alpha_0}^{\pi/2-\alpha_0} dS = \int_{\alpha_0}^{\pi/2-\alpha_0} 2\pi r^2\cos\alpha d\alpha = 2\pi r^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_0\right)-\sin\alpha_0\right).$$

3 (73). Визначімо мінімальну силу, яку прикладає людина. Умова зміщення вантажу – це рівність сил уздовж осі OX:

$$T\cos\alpha = \mu(Mg - T\sin\alpha), \text{ звідси } T = \frac{\mu Mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}. \qquad (1)$$

Визначімо кут α , при якому T приймає мінімальне значення. Для цього проаналізуймо знаменник виразу (1). Знайдімо похідну знаменника по a і прирівняймо її до нуля.

$$(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)' = -\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0 \text{, отже } tg\alpha = \mu\,. \qquad (2)$$



Підставивши (2) в (1), визначімо мінімальне значення T:

$$T_{мін.} = \frac{\mu Mg}{\sqrt{1+\mu^2}}\,. \qquad (3)$$

Остання формула справедлива для випадку, коли людина залишається на місці, тобто:

$$\mu(mg + T\sin\alpha) > T\cos\alpha \text{, звідки } m > M\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\,. \qquad (4)$$

Тобто, за умови (4) відповіддю задачі є рівність (3).
Нехай

$$m \le M\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\,. \qquad (5)$$

Запишімо граничну умову нерухомості людини

$$T\cos\alpha = \mu(mg + T\sin\alpha)\,. \qquad (6)$$

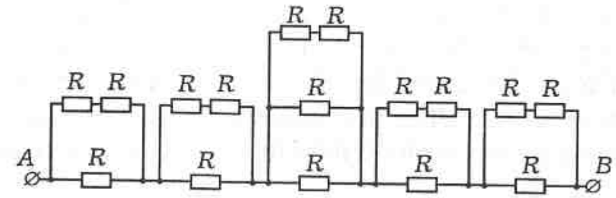
Розв'яжімо систему рівнянь (1) і (6):

$$\text{tg}\alpha = \frac{1}{\mu}\left(\frac{M-m}{M+m}\right), \qquad (7)$$

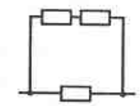
$$T = \frac{g}{2}\sqrt{\mu^2(m+M)^2 + (M-m)^2}\,. \qquad (8)$$

За умови (5) відповіддю задачі є рівність (8).

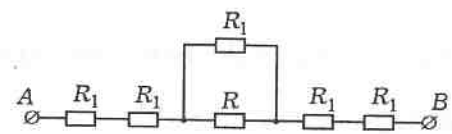
4 (74). Еквіваленте коло:



Як видно з рисунка еквівалентне коло складається з таких ділянок.



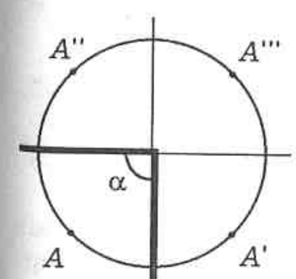
Знайдімо її опір: $R_1 = \dfrac{2R}{3}$, тоді еквівалентне коло матиме вигляд:



Звідси випливає, що:

$$R_{AB} = 4R_1 + \frac{R_1 R}{R_1 + R} = \frac{46}{15}R\,.$$

5 (75). Нехай $\alpha = 90°$.
Зрозуміло, що зображення, зображення зображень і т. д. знаходитимуться на колі (див. рис.). Якщо $\dfrac{360}{\alpha} = N_0$ – ціле число, то кількість



зображень скінченна і дорівнює $N = \dfrac{360}{\alpha} - 1$.
Якщо ж $\alpha < 90°$ мінімальна кількість зображень $N_{мін} = 4$, буде при $\alpha_1 = 72°$, максимальна кількість зображень $N_{макс.} \to \infty$ – у випадках, коли $360/\alpha$ – не ціле число.

2000

1 (76). Введімо нову нумерацію вагонів. Позначімо вагон, біля якого стояв спостерігач, коли потяг рушив з місця номером 1 (один), тоді вагон номер $m = 20$ (стара назва) матиме номер $m' = 16$, а вагон $n = 29$ – номер $n' = 25$. Далі працюймо в нових позначках. Час, за який пройде повз спостерігача $m' = 16$ вагонів визначається так:

$$m'l = \frac{at_{m'}^2}{2}\text{, звідси } t_{m'} = \sqrt{\frac{2m'l}{a}}\ ,$$

l – довжина вагона. $m' - 1 = 15$ вагонів пройде за час

$$t_{m'-1} = \sqrt{\frac{2(m'-1)l}{a}}\ .$$

Тоді вагон m' пройде за час

$$\Delta t_{m'} = t_{m'} - t_{m'-1} = \sqrt{\frac{2l}{a}}\left(\sqrt{m'} - \sqrt{m'-1}\right). \qquad (1)$$

Аналогічно для вагона $n' = 25$

$$\Delta t_{n'} = t_{n'} - t_{n'-1} = \sqrt{\frac{2l}{a}}\left(\sqrt{n'} - \sqrt{n'-1}\right). \qquad (2)$$

З (1) і (2) отримаймо:

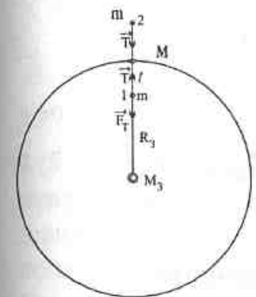
$$\Delta t_{n'} = \Delta t_{m'} \frac{\sqrt{n'} - \sqrt{n'-1}}{\sqrt{m'} - \sqrt{m'-1}} \approx 8\text{ с}.$$

У старих позначеннях формула має вигляд:

$$\Delta t_n = t\frac{\sqrt{n-k+1} - \sqrt{n-k}}{\sqrt{m-k+1} - \sqrt{m-k}}\ .$$

2 (77). Якщо космонавт і станція рухаються по одній і тій самій орбіті, то сила натягу шнура $T = 0$. Зрозуміло, що сила T буде максимальною, коли космонавт, станція і центр Землі лежать на одній прямій.

Якщо станція має постійну орбіту, людина може мати два положення: 1 – ближче до Землі й 2 – далі, ніж станція від Землі. Сила натягу



шнура буде більшою у випадку 1, тому що зміна сили тяжіння, яка діє на людину у цьому випадку більша. (Для наближених розрахунків результат однаковий. Переконайтеся у цьому самостійно.) Враховуючи, що маса станції $M \gg m$, вважаймо, що кутова швидкість станції з людиною на шнурі і без неї однакові. Тоді для руху по колу станції застосуймо другий закон Ньютона:

$$M\frac{v^2}{R_3 + l} = M\omega^2(R_3 + l) = \gamma\frac{MM_3}{(R_3 + l)^2}\ ,$$

звідси $$\omega^2 = \gamma\frac{M_3}{(R_3 + l)^3} = \gamma\frac{M_3}{R_3^2}\frac{R_3^2}{(R_3 + l)^3} = \frac{gR_3^2}{(R_3 + l)^3}\ ,$$

другий закон Ньютона для руху людини:

$$m\omega^2 R_3 = mg - T\ ,$$

звідси $$T = m(g - \omega^2 R_3) = mg\left(1 - \frac{R_3^3}{(R_3 + l)^3}\right) \approx \frac{3mgl}{R_3}$$

(при перетвореннях враховано, що $R_3 \gg l$). Отже,

$$T = 2\cdot10^{-2}\text{ Н}.$$

3 (78). Втрати в лінії визначаються $P_л = I^2 R_л$ ($R_л$ – опір лінії електропередачі). Щоб зменшити втрати в лінії у 100 разів, треба зменшити силу струму у 10 разів. Спочатку було:

$$U_{дж.1} = U_л + U_н = kU + U = (k+1)U\ .$$

$U_{дж}$, $U_л$, $U_н$ – напруги відповідно на джерелі, лінії й навантаженні. Після зменшення струму в 10 разів:

$$U_{дж.2} = U_л/10 + 10U_н = (k/10 + 10)U$$

(напруга на навантаженні має зрости в 10 разів, щоб потужність навантаження не змінилась).

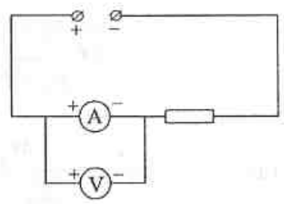
$$U_{дж.2}/U_{дж.1} = (k/10+10)/(k+1).$$

При $k < 10$ напругу джерела треба збільшити.

4 (79). Людина бачить $N = 360/\alpha - 1 = 7$ зображень. (Дивись задачу **75**).

5 (80). Склавши перше коло, визначімо опір амперметра:

$$R_A = U_1/I_1 .$$

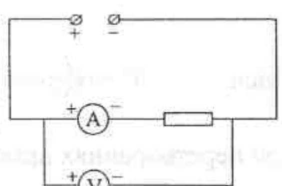


Склавши друге коло, визначімо опір резистора:

$$U_2 = I_2 R_A + I_2 R_x ,$$

звідси

$$R_x = \frac{U_2 - I_2 R_A}{I_2} = \frac{U_2}{I_2} - R_A = \frac{U_2}{I_2} - \frac{U_1}{I_1}.$$



10 клас

1993

1 (81). Відомо, що поверхня рідини перпендикулярна прискоренню вільного падіння (напруженості гравітаційного поля) поля тяжіння у стані рівноваги.
Нехай до посудини приклали силу F (як показано на рис. 1). Вона рухатиметься з прискоренням a_0 вниз по похилій площині. За умовою задачі поверхня рідини паралельна площині.

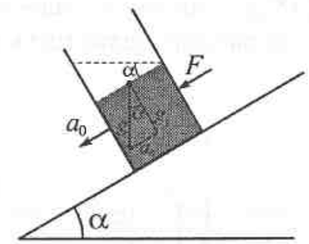


Рис. 1.

Перейдімо в неінерціальну систему відліку, що рухається вниз з прискоренням a_0. У цій системі відліку посудина знаходитиметься у стані рівноваги, а поверхня рідини стане перпендикулярною до нового прискорення вільного падіння $\vec{g}_1 = \vec{g} + (-\vec{a}_0)$. Це випливає з принципу еквівалентності, згідно якого ґравітаційне поле (a_0) у локальній ділянці простору еквівалентне „полю сил інерції". Тобто, дію сил інерції замінімо додатковим гравітаційним полем з прискоренням a_0, що дорівнює і протилежне за напрямком прискоренню a_0, з яким рухається неінерціальна система відліку. Тоді з рис. 1:

$$a_0 = g \sin a ,$$

тобто, щоб поверхня рідини була паралельна похилій площині, посудина мусить рухатись з прискоренням $a = a_0 = g \sin a$.

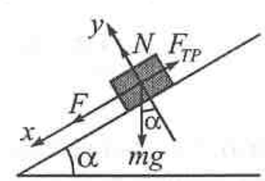


Рис. 2.

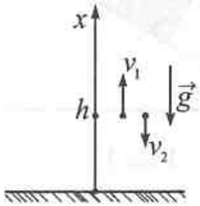
Опишімо рух посудини відносно поверхні (рис. 2). Застосуймо другий закон Ньютона у проекціях на вісі

OX: $$ma_0 = mg\sin\alpha = F + mg\sin\alpha - F_{mp} ,$$

OY: $$N - mg\sin\alpha = 0\,.$$

Тоді, $N = mg\cos\alpha$, $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$, $F = F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$.

2 (82). Розв'яжімо задачу координатним методом (див. рис.). Початкова координата тіла в обох випадках h. Запишімо рівняння руху тіл:



$$x_1 = h + v_1 t - \frac{gt^2}{2}\,, \tag{1}$$

$$x_2 = h - v_2 t - \frac{gt^2}{2}\,. \tag{2}$$

Визначімо час падіння кожного тіла, враховуючи, що у момент падіння їх координата дорівнює нулеві.

$$x_1 = 0 = h + v_1 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}\,,\ \text{звідси}\ t_1 = \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh}}{g}\,, \tag{3}$$

$$x_2 = 0 = h - v_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}\,,\ \text{звідси}\ t_2 = \frac{-v_2 + \sqrt{v_2^2 + 2gh}}{g}\,. \tag{3}$$

Тоді, $$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{v_1 + v_2 + \sqrt{v_1^2 + 2gh} - \sqrt{v_2^2 + 2gh}}{g}\,.$$

3 (83). Скористаймось методом розмірностей для виведення формули швидкості звуку у газі. За умовою задачі ця швидкість залежить тільки від густини газу ρ і його тиску p. Тобто:

$$v = \alpha \rho^x p^y\,, \tag{1}$$

(α – безрозмірний коефіцієнт).
Показники степенів (x, y) обчислімо з умови тотожності розмірностей правої та лівої частини рівняння (1):

$$\frac{м^1}{с^1} = \frac{кг^x \cdot Н^y}{м^{3x} \cdot м^{2y}} = \frac{кг^x \cdot кг^y \cdot м^y}{м^{3x} \cdot м^{2y} \cdot с^{2y}} = \frac{кг^{x+y} \cdot м^{(y-3x-2y)}}{с^{2y}}\,.$$

Прирівняймо показники при однакових одиницях вимірювання й розв'яжімо систему рівнянь:

$$1 = y - 3x - 2y\,,$$
$$1 = 2y\,,$$
$$0 = x + y\,.$$

Отримаймо $y = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$. Вираз для швидкості звуку у газі матиме вигляд:

$$v = \alpha \rho^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} = \alpha\sqrt{\frac{p}{\rho}}\,.$$

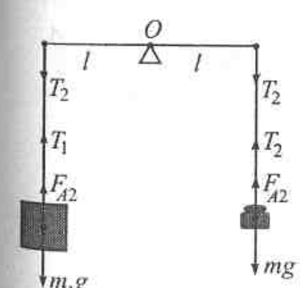
Для газу в першому і другому станах матимемо:

$$v_1 = \alpha\sqrt{\frac{p_1}{\rho_1}}\,, \qquad v_2 = \alpha\sqrt{\frac{p_2}{\rho_2}}\,.$$

Відношення швидкостей дорівнюватиме:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{p_1\rho_2}{p_2\rho_1}}\,.$$

4 (84). Терези знаходитимуться у рівновазі за умови $T_1 = T_2$. Запишімо умову рівноваги тіла і наважок:



$$T_1 = m_1 g - F_{A1}\,, \tag{1}$$

$$T_2 = mg - F_{A2}\,, \tag{2}$$

де m_1 – дійсна маса тіла,

$$F_{A1} = \rho_0 g V \tag{3}$$

– сила Архімеда, що діє на тіло з боку повітря.

$$F_{A2} = \rho_0 g V_1 = \rho_0 g \frac{m}{\rho} \qquad (4)$$

– сила Архімеда, що діє на рівноважки з боку повітря.
Прирівняймо (1) та (2), враховуючи (3), (4):

$$m_1 g - \rho_0 g V = mg - \rho_0 g \frac{m}{\rho} ,$$

звідси
$$m_1 - m = \rho_0 \left(V - \frac{m}{\rho} \right) .$$

Відносна похибка вимірювання дорівнюватиме:

$$\varepsilon = \frac{m_1 - m}{m_1} \cong \frac{m_1 - m}{m} = \frac{\rho_0}{m}\left(V - \frac{m}{\rho} \right) = 0{,}0015 = 0{,}15\,\% .$$

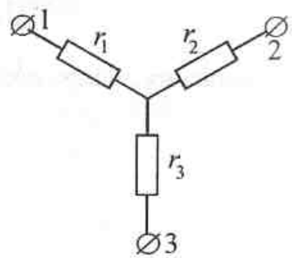
(Враховано: $m_1 \approx m$).

5 (85). Для з'єднання зіркою маємо:

$$R_{12} = r_1 + r_2 . \qquad (1)$$

$$R_{23} = r_2 + r_3 . \qquad (2)$$

$$R_{31} = r_3 + r_1 . \qquad (3)$$

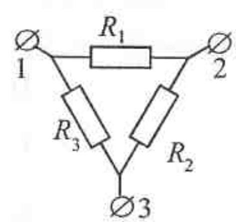


Для з'єднання трикутником маємо:

$$R_{12} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} . \qquad (4)$$

$$R_{23} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} . \qquad (5)$$

$$R_{31} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} . \qquad (6)$$



Прирівняймо ці рівності відповідно:

$$r_1 + r_2 = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} , \qquad (7)$$

$$r_2 + r_3 = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} , \qquad (8)$$

$$r_3 + r_1 = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} . \qquad (9)$$

Додаймо рівності (7), (8) та (9):

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1 + R_2 + R_3} , \qquad (10)$$

віднімімо відповідно (7), (8) та (9):

$$r_1 = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3} , \qquad (11)$$

$$r_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} , \qquad (12)$$

$$r_3 = \frac{R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3} . \qquad (13)$$

Щоб перейти від трикутника до зірки повинні виконуватись умови (11), (12) та (13). Знайдімо R_1, R_2, та R_3:

$$r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{R_1^2R_2R_3 + R_2^2R_1R_3 + R_3^2R_1R_2}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} =$$

$$= \frac{R_1R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3} . \qquad (14)$$

Поділімо (14) відповідно на (13), (11) та (12):

$$R_1 = \frac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1}{r_3} , \qquad (15)$$

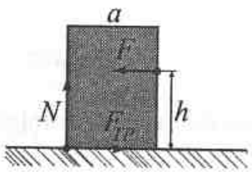
$$R_2 = \frac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1}{r_1} , \qquad (16)$$

$$R_3 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_2}. \qquad (17)$$

Отже, для переходу від зірки до трикутника необхідне виконання умов (15), (16) та (17).

1994

1 (86). Дивись задачу **47**.

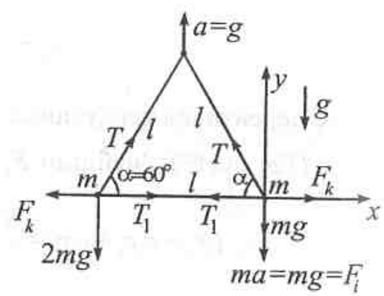


$$\mu = \frac{a}{2h}.$$

2 (87). В умові задачі не вказано чи присутнє поле тяжіння Землі, тому розгляньмо два випадки:

1. $g_з = g$.

Перейдімо у неінерціальну систему відліку, що рухається з прискоренням $a = g$. На кожну кульку діятимуть сили натягу ниток T і T_1, сили Кулона $F_K = k\dfrac{q^2}{l^2}$, сили тяжіння mg і сили інерції (див. рис.).



Запишімо умову рівноваги кульки:

OY: $$T\sin\alpha = 2mg. \qquad (1)$$

OX: $$F_K = T_1 + T\cos\alpha. \qquad (2)$$

З (1) отримаймо: $$T = \frac{2mg}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Підставмо (3) в (2):

$$T_1 = F_K - \frac{2mg}{\sin\alpha}\cos\alpha = k\frac{q^2}{l^2} - \frac{2mg}{\text{tg}\alpha} =$$

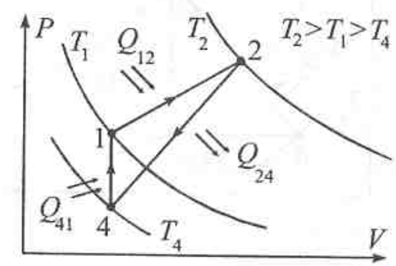
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{l^2} - \frac{2mg}{\text{tg}\alpha} = 0{,}11\ \text{Н}.$$

2. $g_з = 0$.

За відсутністю поля тяжіння Землі розв'яжімо задачу аналогічно, враховуючи відсутність сили тяжіння:

$$T_1 = k\frac{q^2}{l^2} - \frac{mg}{\text{tg}\alpha} = 0{,}17\ \text{Н}.$$

3 (88). Визначімо, на яких ділянках першого та другого циклів система приймає теплоту, а на яких віддає.



Ділянка 1 – 2:

$$\Delta p_{12} > 0,\ \Delta V_{12} > 0,\ \Delta T_{12} > 0.$$

(точка 2 відповідає ізотермі з більшою температурою).

$A'_{12} > 0$ – газ розширюється.

$\Delta U_{12} > 0$ – газ нагрівається.

$Q_{12} = \Delta U_{12} + A'_{12} > 0$ – газ приймає теплоту.

Ділянка 2 – 4:

$\Delta T_{24} < 0$, отже $\Delta U_{24} < 0$, $\Delta V_{24} < 0$, отже $A'_{24} < 0$,

$Q_{24} = \Delta U_{24} + A'_{24} < 0$ – газ віддає теплоту.

Ділянка 4 – 1:

$\Delta T_{41} > 0$, отже $\Delta U_{41} > 0$, $\Delta V_{41} = 0$, отже $A'_{41} = 0$,

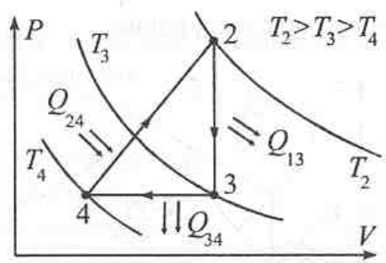
$Q_{41} = \Delta U_{41} > 0$ – газ приймає теплоту.

Тоді ККД циклу дорівнюватиме:

$$\eta_1 = \frac{A_{кор.}}{Q_{затр.}} = \frac{Q_{затр.} - Q_{віддане}}{Q_{затр.}} =$$

$$= 1 - \frac{Q_{віддане}}{Q_{затр.}} = 1 - \frac{Q_{24}}{Q_{12} + Q_{41}},$$

звідси
$$Q_{12} + Q_{41} = \frac{Q_{24}}{1 - \eta_1}. \tag{1}$$



Ділянка 2 – 3:

$\Delta T_{23} < 0$, отже $\Delta U_{23} < 0$, $\Delta V_{23} = 0$, отже $A'_{23} = 0$,

$Q_{23} = \Delta U_{23} < 0$ – газ віддає теплоту.

Ділянка 3 – 4:

$\Delta T_{34} < 0$, отже $\Delta U_{34} < 0$, $\Delta V_{34} < 0$, отже $A'_{34} < 0$,

$Q_{34} = \Delta U_{34} + A'_{34} < 0$ – газ віддає теплоту.

Ділянка 4 – 2:

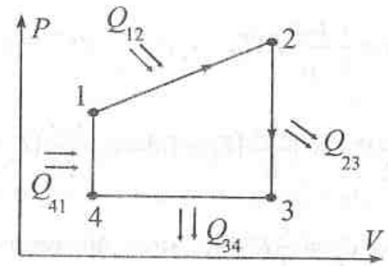
$\Delta V_{42} > 0$, отже $A'_{42} > 0$, $\Delta T_{42} > 0$, отже $\Delta U_{42} > 0$.

$Q_{42} = \Delta U_{42} + A'_{42} > 0$ – газ приймає теплоту.

$$\eta_2 = \frac{Q_{24} - Q_{23} - Q_{34}}{Q_{24}},$$

звідси
$$Q_{23} + Q_{34} = Q_{24}(1 - \eta_2), \tag{2}$$

$$\eta = \frac{Q_{12} + Q_{41} - (Q_{23} + Q_{34})}{Q_{12} + Q_{41}} = 1 - \frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{12} + Q_{41}}.$$



Врахувавши (1) та (2), отримаймо:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{24}(1-\eta_2)(1-\eta_1)}{Q_{24}} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2.$$

4 (89). Нехай $\mu_0 = \frac{m}{t}$ – витрата газу. За час t через калориметр пройде газ масою $m = \mu t$ й отримає від нагрівника кількість теплоти $Q = Nt$. Внутрішня енергія цієї маси газу зміниться на:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{i}{2}\frac{\mu_0 t}{\mu}R(T_2 - T_1),$$

де i – кількість ступенів свободи руху молекул газу (для одноатомного газу $i = 3$, для двохатомного – $i = 5$, для багатоатомного – $i = 6$), μ – молярна маса газу, R – універсальна газова стала. Газ виконає роботу $A' = p\Delta V$ (при сталому тиску). Знайдімо роботу газу, використавши рівняння стану для температур T_1 і T_2:

$$pV_1 = \nu RT_1, \tag{1}$$

$$pV_2 = \nu RT_2. \tag{2}$$

$$A' = pV_2 - pV_1 = \nu R(T_2 - T_1) .$$

Запишімо перший закон термодинаміки:

$$Q = \Delta U + A' ,$$

звідси

$$Nt = \frac{i}{2}\frac{\mu_0 t}{\mu}R(T_2 - T_1) + \frac{\mu_0 t}{\mu}R(T_2 - T_1) =$$

$$= \left(\frac{i}{2}R + R\right)\frac{\mu_0 t}{\mu}(T_2 - T_1) = c_p\frac{\mu_0 t}{\mu}(T_2 - T_1). \qquad (3)$$

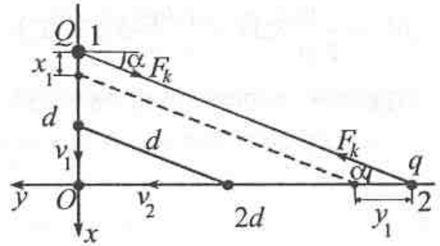
Тут враховано, що $c_p = \frac{i}{2}R + R$, молярна теплоємність газу при сталому тиску. $c_p = c_V + R$.

З рівняння (3) отримаймо:

$$T_2 = T_1 + \frac{\mu N_1}{(c_V + R)\mu_0} \approx 304\ \text{K} .$$

$$t_2 = 27°\text{C} .$$

5 (90). Вважаймо, що система знаходиться у горизонтальній площині, або знехтуймо силою тяжіння. Тоді намистинки рухатимуться тільки під дією кулонівських сил.



Визначімо прискорення цих тіл, для цього використаймо другий закон Ньютона у проекціях на вісі:

OX: $$F_к \sin\alpha = ma_x .$$

OY: $$F_к \cos\alpha = ma_y .$$

Розділімо ці рівняння одне на друге:

$$\frac{a_x}{a_y} = \text{tg}\alpha = \frac{1}{2} ,$$

отже, $$a_y = 2a_x .$$

Друга намистинка має прискорення вдвічі більше, ніж перша. Це означає, що при русі швидкість першої намистинки $v_1 = a_x t$ завжди вдвічі менша, ніж другої $v_2 = a_y t$. За рівні довільні проміжки часу перша намистинка завжди проходитиме шлях вдвічі менший, ніж друга $2x_1 = y_1$. Це означає, що під час руху кути трикутника зберігатимуться:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{d}{2d} = \frac{d - x_1}{2d - y_1} = \frac{d - x_1}{2d - 2x_1} = \frac{1}{2} .$$

Отже, намистинки одночасно попадуть у вершину прямого кута. Визначімо швидкість намистинок, коли відстань між ними дорівнюватиме *d*. Запишімо закон збереження енергії для початкового і цього моментів часу:

$$W_1 = W_2 + \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} ,$$

але $$v_2 = 2v_1 ,$$

а $$W_1 = -k\frac{qQ}{\sqrt{d^2 + 4d^2}} ,\quad W_2 = -k\frac{qQ}{d}$$

– відповідно початкова й кінцева взаємодії зарядів (заряди притягуються, отже, знаки їх різні, а енергії – від'ємні).

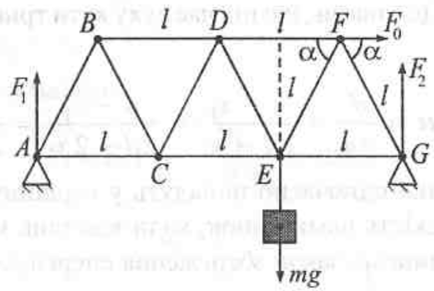
$$-k\frac{qQ}{5d} + k\frac{qQ}{d} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{5mv_1^2}{2} .$$

звідси $$v_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{qQ(\sqrt{5}-1)}{10\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 md}}$$

$$v_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{qQ(\sqrt{5}-1)}{10\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 md}} .$$

1995

1 (91). Ферма моста невагома. На систему діють сили реакції опор і сила тяжіння вантажу. Запишімо умову рівноваги ферми відносно вісі, що проходить через точку A:



$$mg \cdot 2l = F_2 \cdot 3l ,$$

звідси $$F_2 = \frac{2}{3} mg . \qquad (1)$$

Відносно вісі G: $$mgl = F_1 \cdot 3l ,$$

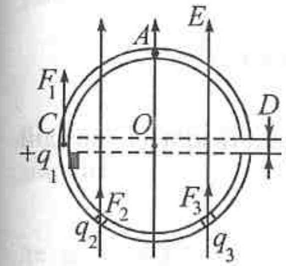
$$F_1 = \frac{mg}{3} . \qquad (2)$$

Визначімо силу пружності F_0 у стрижні DF. Розгляньмо частину ферми EFG і запишімо умову рівноваги відносно вісі, що проходить через точку E:

$$F_2 l = F_0 l \sin\alpha = F_0 l \sin 60° ,$$

звідси $$F_0 = \frac{F_2}{\sin 60°} = \frac{2mg \cdot 2}{3\sqrt{3}} = \frac{4mg}{3\sqrt{3}} .$$

2 (92). З боку електричного поля на всі елементи кільця діють сили, що створюють моменти сил відносно вісі O. Але дія на довільний заряд q_2, буде скомпенсована дією на симетрично розташований (див. рис.) такий самий заряд q_3. Нескомпенсованою залишиться дія на заряд q_1 (навпроти вирізу), кільце почне розкручуватись за годинниковою стрілкою.

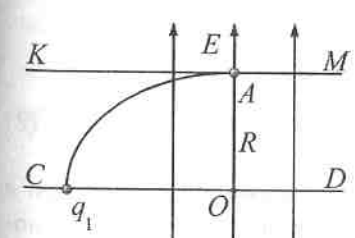


У момент проходження зарядом q_1 точки A швидкість кільця максимальна (після проходження точки A момент сили, що діє на q_1 спрямований проти руху кільця і тому його швидкість буде зменшуватись). Визначімо максимальну кутову швидкість кільця, користуючись теоремою про кінетичну енергію. Робота $A_{ел}$, яку здійснює електричне поле, дорівнюватиме зміні кінетичної енергії обертального руху кільця:

$$\Delta E_K = E_{KA} = \frac{I_0 \omega^2_{макс.}}{2} .$$

Робота електричного поля не залежить від траєкторії руху заряду і для однорідного поля дорівнює:

$$A_E = q_1 \Delta\varphi_{AC} = q_1 ER .$$



(заряд q_1 перемістився з еквіпотенціальної поверхні CD (рис. 2) на еквіпотенціальну поверхню KM).

$$\frac{I_0 \omega^2_{макс.}}{2} = q_1 ER ,$$

звідси $$\omega_{макс.} = \sqrt{\frac{2q_1 ER}{I_0}},$$

де $q_1 = \dfrac{Ql}{2\pi R^2}$ – заряд ділянки кільця навпроти вирізу.

$I_0 = mR^2$ – момент інерції кільця відносно вісі O.

$\omega_{макс.} = \sqrt{\dfrac{QlE}{\pi R^2 m}}$ – максимальна кутова швидкість кільця, що здійснюватиме коливання.

3 (93).
Після вибуху всі продукти реакції перетворяться у газ. Визначімо кількість радіоактивних частинок:

$$N = \frac{m}{\mu} N_A, \tag{1}$$

де m – маса плутонію, $\mu = 242 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярна маса плутонію, N_A – число Авогадро.
Оцінімо масу атмосфери враховуючи, що її висота набагато менша за радіус Землі. Вважаймо, що вся атмосфера знаходиться у гравітаційному полі з постійним прискоренням вільного падіння. Тоді атмосферний тиск p_0 знайдімо як вагу атмосфери $m_a g$ поділену на площу опори – площу поверхні Землі $S = 4\pi R_З^2$.

$$p_0 = \frac{m_a g}{4\pi R_З^2},$$

звідси $$m_a = \frac{4\pi R_З^2 p_0}{g}. \tag{2}$$

За умовою задачі радіоактивні частинки рівномірно розподілені в атмосфері, тобто N радіоактивних частинок припадає на всю атмосферу масою m_a, а N_1 – припадає на повітря масою m_1, що міститься в об'ємі $V_1 = 1$ л повітря біля поверхні Землі. Запишімо рівняння стану для $V_1 = 1$ л повітря біля поверхні Землі за нормальних умов ($p_0 = 10^5$ Па, $T_0 = 273$ K):

$$p_0 V_1 = \frac{m_1}{\mu_n} R T_0,$$

звідси $$m_1 = \frac{p_0 V_1 \mu_n}{R T_0}. \tag{3}$$

де $\mu_n = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярна маса повітря.
Визначімо кількість частинок, скориставшись пропорцією:

$$\frac{N}{m_a} = \frac{N_1}{m_1},$$

$$N_1 = N\frac{m_1}{m_a} = \frac{m N_A p_0 V_1 \mu_n g}{\mu R T_0 \cdot 4\pi R_З^2 p_0} =$$

$$= \frac{m V_1 \mu_n g}{4\mu k T_0 \pi R_З^2} \approx 600 \text{ частинок},$$

де k – стала Больцмана.
Отже, на 1 л повітря біля поверхні Землі припадатиме близько 600 радіоактивних частинок.

4 (94). Кількість теплоти, що виділиться при падінні корка, визначімо, використовуючи закон збереження енергії для початкового і кінцевого станів (див. рис.). Потенціальна енергія корка $W_1 = \rho S_0 h g (H + x_2)$ йде на збільшення потенціальної енергії води об'ємом V_1, що переміститься в об'єм V_2 (див. рис.):

$$W_2 = \rho_0 V_1 g\left(\frac{x_2}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

і частково перетворюється у теплову енергію Q:

$$\rho S_0 hg(H + x_2) = \rho_0 V_1 g\left(\frac{x_2}{2} + \frac{x}{2}\right) + Q \ . \qquad (1)$$

Визначімо x_1 з умови плавання корка:

$$\rho S_0 hg = \rho_0 S_0 x_1 g \ ,$$

звідси

$$x_1 = \frac{\rho h}{\rho_0} \ . \qquad (2)$$

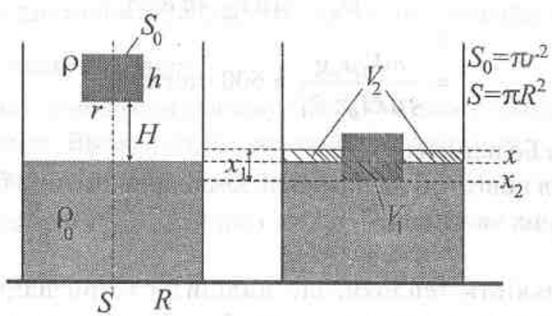
$V_1 = V_2$ – умова нестисливості рідини:

$$S_0(x_1 - x) = (S - S_0)x \ , \qquad (3)$$

звідси

$$x_2 = x_1 - x = \frac{\rho h}{\rho_0}\left(\frac{S - S_0}{S}\right), \qquad (4)$$

$$V_1 = S_0 \frac{\rho h}{\rho_0}\left(\frac{S - S_0}{S}\right) \ . \qquad (5)$$



З (1), врахувавши (3), (4) та (5), отримаймо:

$$Q = \pi r^2 \rho g h\left(H + \frac{\rho h}{2\rho_0}\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)\right).$$

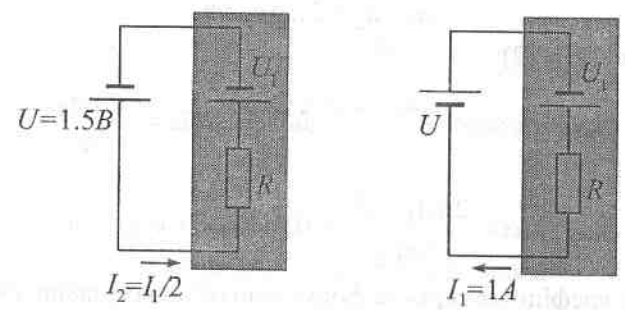
5 (95). Усередині „чорної скриньки" знаходиться джерело струму напругою U_1 і резистор з опором R. Запишімо друге правило Кірхгофа для першого та другого кола:

$$\frac{1}{2} I_1 R = U - U_1 \ . \qquad (1)$$

$$I_1 R = U + U_1 \ . \qquad (2)$$

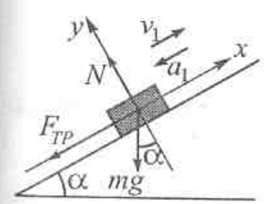
Розв'яжімо систему рівнянь (1), (2) та отримаймо:

$$U_1 = \frac{U}{3} = 0{,}5 \text{ В} \ , \qquad R = \frac{U + U_1}{I_1} = 2 \text{ Ом} \ .$$



1996

1 (96). Запишімо для руху вгору другий закон Ньютона:



$$OX: -ma_1 = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \ , \qquad (1)$$

$$OY: N = mg\cos\alpha \ , \ F_{тр} = \mu mg\cos\alpha \ .$$

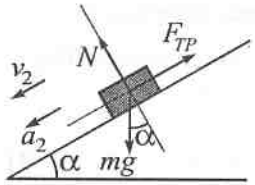
З (1) отримаймо:

$$a_1 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \ . \qquad (2)$$

$$S = \frac{a_1 t_1^2}{2} \text{, отже } a_1 = \frac{2S}{t_1^2} \ . \qquad (3)$$

Для руху вниз маємо:

$$ma_2 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \ ,$$



звідси $a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. (4)

$$S = \frac{a_2 t_2^2}{2}, \text{ звідси } a_2 = \frac{2S}{t_2^2} . \quad (5)$$

Від (2) віднімімо (4), врахувавши (3), (5):

$$\frac{2S}{t_1^2} - \frac{2S}{t_2^2} = 2\mu g\cos\alpha ,$$

звідси
$$\mu = \frac{2S(t_2^2 - t_1^2)}{2gt_1^2 t_2^2 \cos\alpha} . \quad (6)$$

$$a_1 - a_2 = 2\mu g\cos\alpha . \quad (7)$$

Підставмо (7) у (2):

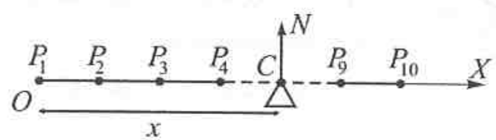
$$a_1 = g\sin\alpha + \frac{a_1 - a_2}{2}, \text{ звідси } \sin\alpha = \frac{a_1 + a_2}{2g}, \quad (8)$$

отже,
$$\sin\alpha = \frac{2S(t_2^2 - t_1^2)}{2gt_1^2 t_2^2} = 0{,}01 << 1, \text{ і } \cos\alpha \approx 1 \quad (9)$$

Знайдімо коефіцієнт тертя за формулою (6), врахувавши (9):

$$\mu = \frac{2S(t_2^2 - t_1^2)}{2gt_1^2 t_2^2} = 0{,}003 .$$

2 (97). Знайдімо точку *C*, підставляючи опору під стрижень, щоб він перебував у рівновазі.



$$N = P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_{10} = \sum_{i=1}^{10} P_i = 55 \text{ Н} .$$

Відносно вісі, що проходить через точку *O* матимемо:

$$N \cdot x = P_1 \cdot 0 + P_2 \cdot d + P_3 \cdot 2d + ... + P_{10} \cdot 9d ,$$

звідси
$$x = \frac{\sum_{i=1}^{10} P_i (i-1) d}{\sum_{i=1}^{10} P_i} = 6d .$$

Отже, центр ваги системи знаходитиметься на відстані $6d$ від вантажу P_1.

3 (98). Враховуючи рівняння стану

$$\frac{pV}{T} = const_1 , \quad (1)$$

отримаймо закон розширення газу.
З (1) випливає:

$$p = \frac{const_1 \cdot T}{V} . \quad (2)$$

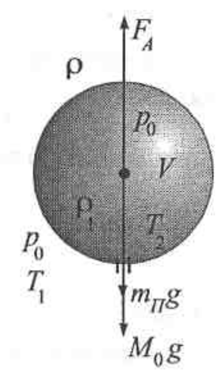
Підставмо (2) в рівняння, що задане умовою задачі

$$pV^{3/2} = \frac{const_1 \cdot T}{V} V^{3/2} = TV^{1/2} \cdot const_1 = const_2 .$$

Для двох станів матимемо: $T_1 V_1^{1/2} = T_2 V_2^{1/2}$,

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{1/2} = 150 \text{ К} .$$

4 (99). Куля підніматиметься при умові:



$$\rho g V = m_0 g + m_n g . \quad (1)$$

Масу повітря m_n визначімо з рівняння стану:

$$p_0 V = \frac{m_n}{\mu_n} RT_2 , \quad m_n = \frac{p_0 V \mu_n}{RT_2} . \quad (2)$$

Знайдімо густину оточуючого повітря:

$$p_0V = \frac{m_n}{\mu_n}RT_1\text{, звідси } \rho = \frac{m_n}{V} = \frac{p_0\mu_n}{RT_2}\ . \qquad (3)$$

Підставмо (3) та (2) в (1) і розрахуймо температуру повітря в кулі:

$$T_2 = \frac{p_0\mu_n VT_1}{p_0\mu_n V - mRT_1} = 341\,\text{K} = 68°\text{C},$$

де $\mu_n = 29\cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярна маса повітря.

5 (100). Температура дротини встановлюється, якщо енергія, яка виділяється при проходженні струму $W = I^2Rt$ дорівнюватиме теплоті, що віддає дротина навколишньому середовищу $Q = \alpha(t_{\partial p} - t_c)t$ (α – коефіцієнт теплопередачі, $t_{\partial p}$ і t_c – відповідно температура дротини і середовища, t – час теплопередачі).

Для всіх випадків запишімо рівняння теплового балансу:

$$I_1^2Rt = \alpha(t_1 - t_0)t\ , \qquad (1)$$

$$I_2^2Rt = \alpha(t_2 - t_0)t\ , \qquad (2)$$

$$I_3^2Rt = \alpha(t_3 - t_0)t\ . \qquad (3)$$

З рівностей (1) та (2) отримаймо:

$$\frac{I_1^2}{I_2^2} = \frac{1}{4} = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}\ ,$$

звідси $$t_0 = \frac{4t_1 - t_2}{3} = 20\,°\text{C}\ .$$

З рівностей (1) та (3) отримаймо:

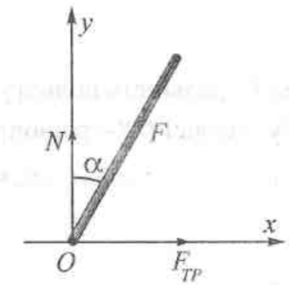
$$\frac{I_1^2}{I_3^2} = \frac{1}{16} = \frac{t_1 - t_0}{t_3 - t_0}\ ,$$

звідси $$t_3 = t_0 + 16(t_1 - t_0) = 580\,°\text{C}\ .$$

Температура дротини в третьому випадку дорівнюватиме 580 °C.

1997

1(101). Знехтуймо вагою стрижня. Момент початку ковзання розгляньмо як стан рівноваги.



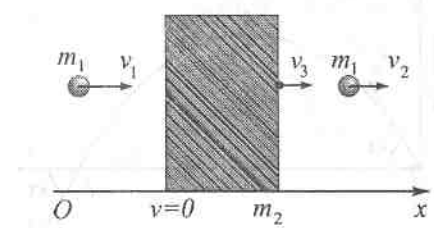
OX: $\quad F_{mp} = F\sin\alpha\ .$

OY: $\quad N = F\cos\alpha\ .$

$$F_{mp} = \mu N = \mu F\cos\alpha = F\sin\alpha\ ,$$

$$\mu = \text{tg}\alpha\ .$$

2 (102). Вважаймо, що куля пробиває дошку в центрі мас і зумовлює тільки її поступальний рух.



Для визначення швидкості дошки запишімо закон збереження імпульсу:

OX: $$mv_1 = m_1v_2 + m_2v_3\ ,$$

$$v_3 = \frac{m_1(v_1 - v_2)}{m_2} = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\ .$$

Кількість теплоти, що виділиться при ударі, визначимо із закону збереження енергії:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1v_2^2}{2} + \frac{m_2v_3^2}{2} + Q\ ,$$

отже, $$Q = \frac{m_1(v_1^2 - v_2^2)}{2} - \frac{m_2v_3^2}{2} = 800\ \text{Дж}\ .$$

3 (103). За принципом незалежності рухів, рух м'яча по вісі OX – рівномірний:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha \ .$$

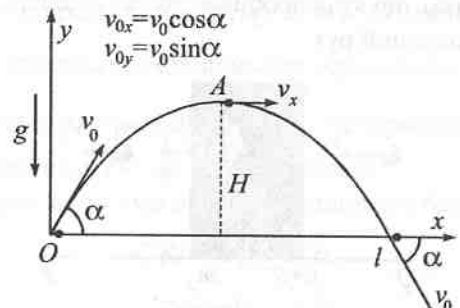
$$l = v_x t_1 = v_0 t_1 \cos\alpha \ , \qquad (1)$$

де l – дальність польоту м'яча, t_1 – час польоту.

Рух по вісі OY – рівноприскорений:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt \ , \qquad (2)$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - g\frac{t^2}{2} \ . \qquad (3)$$



З міркувань симетрії траєкторії швидкість по OY у момент падіння дорівнюватиме:

$$v_y = -v_{0y} = -v_0 \sin\alpha = v_0 \sin\alpha - gt_1 \ ,$$

звідси

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \ ,$$

$$l = \frac{2v_0^2 \sin^2\alpha}{g}\cos\alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \ .$$

Дальність польоту буде максимальною, якщо $\sin 2\alpha = 1$. Звідси $\alpha = 45°$. Швидкість кидання м'яча буде мінімальною за умови, що м'яч кинути під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту.

$$l = \frac{2v_0^2}{g} \ ,$$

звідси

$$v_0 = \sqrt{gl} \ .$$

Час польоту м'яча: $t_1 = \dfrac{2v_0 \sin 45°}{g} = \sqrt{\dfrac{2l}{g}} = 4{,}9\ \text{с}$.

З міркувань симетрії траєкторії визначімо час польоту м'яча до найвищої точки A:

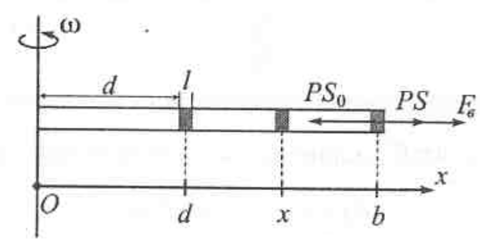
$$t_2 = \frac{1}{2}t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \ . \qquad (4)$$

Визначімо H, підставляючи (4) в (3):

$$H = \frac{v_0 \sin\alpha \cdot v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} =$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2 a}{2g} = \frac{gl \sin^2 45°}{2g} = 30\ \text{м} \ .$$

4 (104). При $\omega = 0$ тиск повітря в трубці дорівнює p_0.



Перейдімо до системи відліку, що обертається з кутовою швидкістю ω, тоді трубка нерухома і на краплину ртуті, крім сил тиску газу, діє відцентрова сила $F_в = m\omega^2 x$. Для краплини, що досягла краю трубки $x = b$, запишімо умову рівноваги:

$$p_0 S = pS + m\omega^2 b \ . \qquad (1)$$

Тиск газу в трубці визначімо за законом Бойля-Маріота:

$$p_0 Sd = pSb \ ,$$

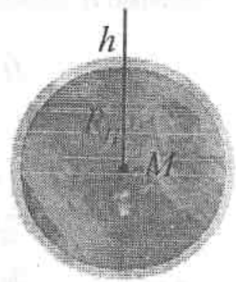
звідси
$$p = p_0 \frac{d}{b} \ . \qquad (2)$$

Маса краплини ртуті $m = \rho Sl$. (3)

Підставмо (2) і (3) в (1):

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0(b-d)}{b^2 \varrho l}} = 25\,\text{с}^{-1} \ .$$

5 (105). Запишімо рівняння стану для газу біля поверхні планети:



$$pV = \frac{m}{\mu} RT \ ,$$

звідси
$$T = \frac{pV\mu}{mR} \ ,$$

де V – невеликий об'єм газу біля поверхні планети. Тоді: $m = \rho V$, отже:

$$T = \frac{p\mu}{R\rho} \ . \qquad (1)$$

Визначімо тиск газу з умови, що сила тиску атмосфери на поверхню планети $pS = p \cdot 4\pi R_n^2$ дорівнює силі тяжіння атмосфери, тобто:

$$4p\pi R_n^2 = \rho \cdot 4\pi R_n^2 hg \ ,$$

звідси
$$p = \rho gh \ . \qquad (2)$$

Визначімо прискорення вільного падіння з умови, що сила тяжіння атмосфери, дорівнює силі притягання атмосфери до планети:

$$mg = \gamma \frac{mM}{R_n^2} \ ,$$

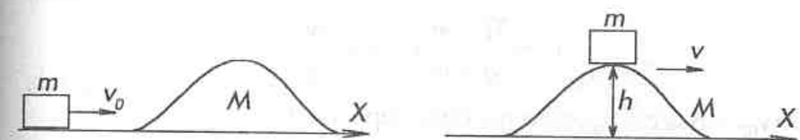
$$g = \gamma \frac{M}{R_n^2} \ . \qquad (3)$$

Знайдімо температуру атмосфери, використовуючи (3), (2), (1):

$$T = \frac{\mu \rho h \gamma M}{\rho R R_n^2} = \frac{\mu h \gamma M}{R R_n^2} \ .$$

1998

1 (106). Мінімальне значення швидкості визначає кінцевий стан системи: тіло m знаходитиметься на вершині тіла M, нерухомо відносно нього.



Запишімо закон збереження енергії (ЗЗЕ) за умови, що тертя відсутнє:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{(m+M)v^2}{2} \ . \qquad (1)$$

Запишімо закон збереження імпульсу (ЗЗІ) по вісі X, оскільки зовнішні сили вздовж вісі X відсутні:

$$mv_0 = (m+M)v \text{, звідси } v = \frac{mv_0}{(m+M)} \ , \qquad (2)$$

Підставмо (2) в (1):

$$mv_0^2 = 2mgh + \frac{m^2 v_0^2}{(m+M)} \text{, звідси } v_0 = \sqrt{\frac{2(m+M)gh}{M}} \approx 5{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \ .$$

Якщо $v_{01} = 5\ \text{м/с} < v_0$, тіло не подолає перешкоду.

Із ЗЗЕ і ЗЗІ:

$$\frac{mv_{01}^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2}\ , \qquad (3)$$

$$mv_{01}=-mv_1+Mv_2\ . \qquad (4)$$

Звідси $$m\left(v_{01}^2-v_1^2\right)=Mv_2^2\ ,$$

$$m\left(v_{01}+v_1\right)=Mv_2\ .$$

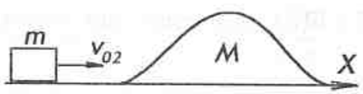
Отже, $$v_{01}-v_1=v_2\ . \qquad (5)$$

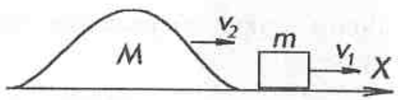
Підставмо (5) в (4):

$$mv_{01}=-mv_1+M\left(v_{01}-v_1\right)\ ,$$

$$v_1=\frac{M-m}{M+m}v_{01}=3{,}3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\ .$$

Якщо $v_{02}=6$ м/с $>v_0$, тіло подолає перешкоду.





Із ЗЗЕ та ЗЗІ: $$\frac{mv_{02}^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2}\ , \qquad (6)$$

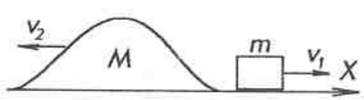
$$mv_{02}=mv_1+Mv_2\ . \qquad (7)$$

Звідси $$m\left(v_{02}^2-v_1^2\right)=Mv_2^2\ ,$$

$$m\left(v_{02}-v_1\right)=Mv_2\ .$$

Отже, $v_{02}+v_1=v_2$, а це неможливо.

Нехай перешкода рухається вліво.



ЗЗІ: $$mv_{02}=mv_1-Mv_2\ , \qquad (8)$$

кінцевий імпульс тіла m більший від початкового. Це суперечить ЗЗЕ. Такий випадок неможливий. Отже, тіло M нерухоме, а тіло m рухатиметься після подолання перешкоди із швидкістю

$$v_1=v_{02}=6\ \text{м/с}\ .$$

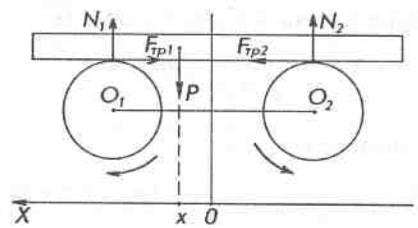
2 (107). Визначімо N_1 і N_2 з умови, що сума моментів сил дорівнюватиме нулеві (тіло рухається поступально):

вісь O_1: $$P(l-x)=N_2\cdot 2l\text{, тобто } N_2=P\frac{l-x}{2l}\ ,$$

отже $$F_{mp2}=\mu P\frac{l-x}{2l}\ ;$$

вісь O_2: $$P(l+x)=N_1\cdot 2l\text{, тобто } N_1=P\frac{l+x}{2l}\ ,$$

отже $$F_{mp1}=\mu P\frac{l+x}{2l}\ .$$



Застосуймо другий закон Ньютона для центра мас тіла:

$$ma=F_{mp2}-F_{mp1}\ \text{, звідси}$$

$$a=-\mu\frac{P}{m}\cdot\frac{2x}{2l}=-\frac{\mu g}{l}x\ .$$

Це рівняння описує гармонійні коливання. Отже, дошка здійснюватиме гармонійні коливання з циклічною частотою:

$$\omega=\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\ .$$

3 (108). а) Бульбашка знаходитиметься у рівновазі, якщо:

$$F_A = m_б g + m_{пб} g \ .$$

Сила Архімеда дорівнюватиме: $F_A = \rho_п g V = \dfrac{p_0 \mu}{RT_0} g \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Сила тяжіння плівки – $m_б g = \rho V_п g = \rho \cdot 4\pi r^2 \delta g$.
Сила тяжіння повітря в бульбашці:

$$m_{пб} g = \rho_{пб} V g = \frac{p_0 \mu}{RT} g \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

$$\frac{p_0 \mu}{RT_0} g \frac{4}{3}\pi r^3 = \rho \cdot 4\pi r^2 \delta g + \frac{p_0 \mu}{RT} g \frac{4}{3}\pi r^3 ,$$

звідси
$$T = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{3\rho\delta R}{p_0 \mu r} \right)^{-1} = \frac{T_0 p_0 \mu r}{p_0 \mu r - 3\rho\delta R T_0} .$$

б) Врахувавши сили поверхневого натягу, знайдімо тиск повітря у бульбашці (він більший від атмосферного на подвоєний Лапласівський тиск, оскільки плівка має дві поверхні):

$$p = p_0 + \frac{4\sigma}{r} \ .$$

Умова рівноваги матиме вигляд:

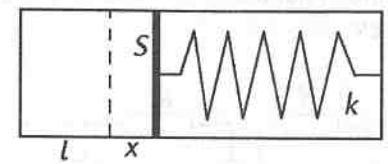
$$\frac{p_0 \pi}{RT_0} g \frac{4}{3}\pi r^3 = \rho \cdot 4\pi r^2 \delta g + \frac{(p_0 + 4\sigma/r)\mu}{RT} g \frac{4}{3}\pi r^3 ,$$

звідси
$$T = \frac{\left(p_0 + \dfrac{4\sigma}{2} \right) \mu r}{\dfrac{p_0 \mu r}{T_0} - 3R\rho\delta} .$$

4 (109). Нехай системі надали Q теплоти. При цьому газ нагрівся на ΔT і виконав роботу по переміщенню поршня на x.

Запишімо перший закон термодинаміки ($\nu = 1$):

$$Q = A + \Delta U = -\Delta \Pi + \Delta U = \frac{k(l+x)^2}{2} - \frac{kl^2}{2} + \frac{3}{2} R\Delta T \ . \qquad (1)$$



Умова рівноваги поршня:

$$p_1 S = kl \, , \ p_2 S = k(l+x) \ .$$

$$p_1 = \frac{RT_1}{Sl} \, , \ p_2 = \frac{RT_2}{S(l+x)} ,$$

звідси
$$\frac{RT_1}{l} = kl \, , \ \frac{RT_2}{l+x} = k(l+x) \ ,$$

отже,
$$kl^2 = RT_1 \, , \ k(l+x)^2 = RT_2 \ . \qquad (2)$$

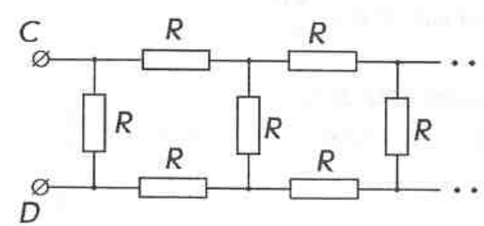
Знайдені величини підставмо в (1):

$$Q = \frac{RT_2}{2} - \frac{RT_1}{2} + \frac{3}{2} R\Delta T = \frac{R}{2}\Delta T + \frac{3}{2} R\Delta T = 2R\Delta T \ .$$

Теплоємність системи дорівнюватиме:

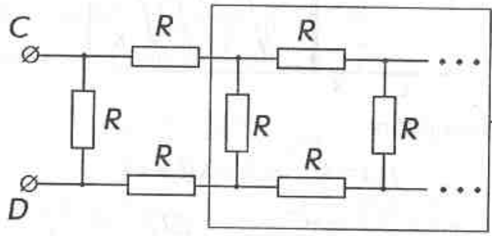
$$C = \frac{Q}{\Delta T} = 2R \, .$$

5 (110). Якщо до точок C і D замість опору r підключити нескінченний ланцюг,



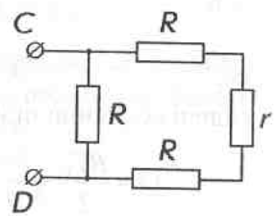
тоді опір між точками A і B не залежатиме від кількості ланок у

нескінченному ланцюзі. Опір r повинен дорівнювати опору нескінченного ланцюга ($r = R_{CD}$), знайдімо його.
Якщо від нескінченного ланцюга відокремити одну ланку, то опір ланцюга не зміниться:



– нескінченний ланцюг має опір r.
Розгляньмо еквівалентне коло:

$$R_{CD} = r = \frac{R(2R+r)}{3R+r},$$



звідси $\quad r^2 + 2Rr - 2R^2 = 0$,

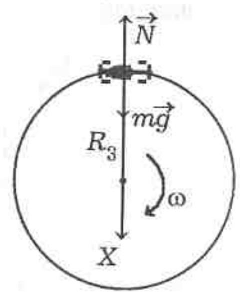
$$r = -R + \sqrt{R^2 + 2R^2} = R\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

1999

1 (111). Якщо автомобіль рухається по колу радіуса R_3 (радіус Землі) із заходу на схід, його швидкість відносно земної вісі буде:

$$v_1 = v + \omega R_3 = v + \frac{2\pi R_3}{T_3},$$

де T_3 – період обертання Землі.
Запишімо другий закон Ньютона для руху по колу:



$$OX: \quad \frac{mv_1^2}{R_3} = mg - N_1, \quad N_1 = mg - \frac{m}{R_3}\left(v + \frac{2\pi R_3}{T_3}\right)^2, \qquad (1)$$

У випадку руху автомобіля зі сходу на захід матимемо:

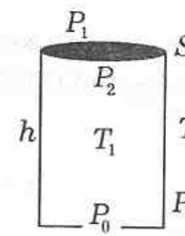
$$OX: \quad \frac{mv_2^2}{R_3} = mg - N_2, \text{ звідси } N_2 = mg - \frac{m}{R_3}\left(v - \frac{2\pi R_3}{T_3}\right)^2. \qquad (2)$$

Знайдімо різницю сил тиску автомобіля як різницю сил реакції опори:

$$\Delta N = N_2 - N_1 = \frac{m}{R_3}\left(\left(v + \frac{2\pi R_3}{T_3}\right)^2 - \left(v - \frac{2\pi R_3}{T_3}\right)^2\right) = \frac{8\pi m v}{T_3} = 29\text{ Н}.$$

2 (112). Знайдімо силу тиску навколишнього повітря, що діє на дошку:

$$F_1 = P_1 S = (P_0 - \rho_0 g h)S,$$



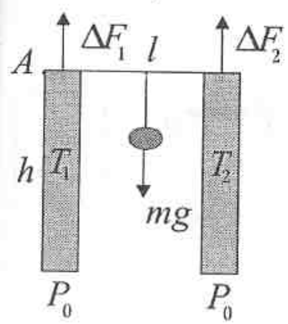
та силу тиску – у першому димарі:

$$F_2 = P_2 S = (P_0 - \rho_1 g h)S.$$

Тоді $\Delta F_1 = F_2 - F_1 = (\rho_0 - \rho_1)ghS =$

$$= \left(\frac{P_0\mu_n}{RT_0} - \frac{P_0\mu_n}{RT_1}\right)ghS = \frac{P_0\mu_n ghS}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) = 22\text{ Н}.$$

Визначімо аналогічно для другого димаря:

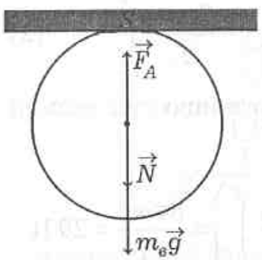


$$\Delta F_2 = \frac{P_0\mu_n ghS}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2}\right) = 70\text{ Н}.$$

Дошка обертатиметься навколо точки A, оскільки $\Delta F_1 > \Delta F_2$. Запишімо умову рівноваги відносно точки A: $\Delta F_2 l = mg\dfrac{l}{2}$ (розмірами димаря знехтуймо). Знайдімо масу вантажу:

$$m = \frac{2\Delta F_2}{g} = 14 \text{ кг} .$$

3 (113). Визначімо об'єм кулі ($T = 300$ К – кімнатна температура)



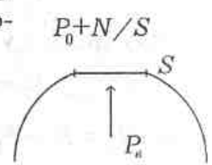
$$V_к = \frac{m_в RT}{\mu_в P_в} . \qquad (1)$$

Визначімо силу реакції стелі:

$$N = F_A - m_в g = \rho_п g V_к - m_в g =$$

$$= \frac{P_0 \mu_п}{RT} g \frac{m_в RT}{\mu_в P_в} - m_в g = m_в g\left(\frac{P_0 \mu_п}{P_в \mu_в} - 1\right). \qquad (2)$$

Врахуймо, що густина повітря: $\rho_п = \dfrac{P_0 \mu_п}{RT}$, де $\mu_п$ і $\mu_в$ – молярні маси повітря й водню. Поверхня кулі у місці дотику пласка, тому сила реакції опори розподілена рівномірно:

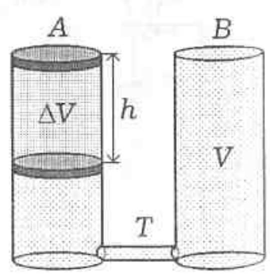


$$P_0 + \frac{N}{S} = P_в ,$$

отже,

$$S = \frac{N}{P_в - P_0} = \frac{m_в g}{P_в - P_0}\left(\frac{P_0 \mu_п}{P_в \mu_в} - 1\right) = 2{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 2{,}6 \text{ мм}^2 .$$

4 (114). Застосуймо перший закон термодинаміки, враховуючи те, що газ у посудині теплоізольований (знехтуймо теплоємністю поршня і посудини):



$$Q = 0 ,\ \Delta U = A , \qquad (1)$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\nu R T_2 - \frac{3}{2}\nu R T_1 = \frac{3}{2}\nu R\left(T_2 - T_1\right) \qquad (2)$$

Знайдімо роботу поршня над газом, врахувавши, що тиск газу залишається постійним, тобто поршень опускатиметься рівномірно й сила тиску на газ дорівнюватиме силі тиску газу:

$$A = mgh .$$

Сила тиску газу зрівноважуватиме поршень:

$$pS = mg \text{, тобто } A = pSh = p\Delta V . \qquad (3)$$

Для початкового стану запишімо рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$pV = \nu R T_1 ,\ \nu R = \frac{pV}{T_1} . \qquad (4)$$

Підставмо (4) у (2):

$$\Delta U = \frac{3pV}{2T_1}\left(T_2 - T_1\right) . \qquad (5)$$

З рівняння Менделєєва-Клапейрона для початкового і кінцевого станів матимемо:

$$\frac{V}{T_1} = \frac{2V - \Delta V}{T_2} ,\ \Delta V = 2V - \frac{VT_2}{T_1} . \qquad (6)$$

Підставмо (6) в (3):

$$A = pV\left(2 - \frac{T_2}{T_1}\right) , \qquad (7)$$

а далі (7), (5) у рівність (1):

$$\frac{3pV}{2T_1}\left(T_2 - T_1\right) = pV\left(2 - \frac{T_2}{T_1}\right) ,$$

отже, $$T_2 = \frac{7}{5} T_1 = 420 \text{ К} .$$

5 (115). Електрони перестануть потрапляти на кулю, якщо

$$\frac{mv^2}{2} \le e\varphi \ , \qquad (1)$$

де φ – потенціал сфери, який дорівнює $\varphi = k\dfrac{Ne}{R}$. Визначімо кількість електронів N, що потрапили на кулю, виходячи з (1):

$$\frac{mv^2}{2} = k\frac{Ne^2}{R}, \text{ звідси } N = \frac{mv^2R}{2ke^2}. \qquad (2)$$

Запишімо закон збереження енергії для початкового й кінцевого станів системи:

$$N\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}q\varphi + Q\ , \qquad (3)$$

кінетична енергія електронів (на нескінченності знехтуймо взаємодією електронів між собою) перетворюється в енергію електричного поля зарядженої кулі й внутрішню енергію кулі.
З (3), враховуючи (2), матимемо:

$$\Delta T = \frac{Q}{C_k} = \frac{N\cdot\dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{1}{2}Nek\dfrac{Ne}{R}}{C_k} = \frac{R}{2kC_k}\left(\frac{mv^2}{2e}\right)^2 = \frac{\pi\varepsilon_0 R}{2C}\left(\frac{mv^2}{e}\right)^2.$$

2000

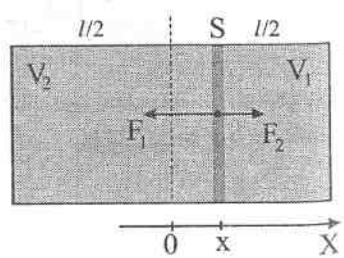
1 (116). Запишімо рівняння стану:

$$pV = \nu RT = RT\ .$$

При відхиленні поршня закон Бойля-Маріотта для кожного об'єму газу матиме вигляд:

$$pV = p_1V_1 = p_1(V - Sx),$$

$$p_1 = \frac{pV}{V - Sx}, \quad pV = p_2V_2 = p_2(V + Sx),$$



звідси $$p_2 = \frac{pV}{V + Sx}\ .$$

Запишімо другий закон Ньютона для поршня у проекції на вісь OX:

$$ma = F_2 - F_1 = p_2S - p_1S = S\left(\frac{pV}{V + Sx} - \frac{pV}{V - Sx}\right),$$

звідси $$a = -\frac{pVS\cdot 2Sx}{m(V^2 - (Sx)^2)} \approx -\frac{2RTS^2}{mV^2}x\ .$$

Отримане рівняння описує гармонійні коливання з циклічною частотою:

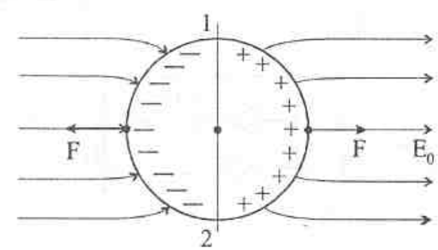
$$\omega = \sqrt{\frac{8RT}{ml^2}}\ .$$

Період коливань поршня:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{8RT}} = \pi\sqrt{\frac{ml^2}{2RT}}\ .$$

2 (117). Поверхнева густина індукованих зарядів прямопропорційна величині зовнішнього поля:

$$\sigma_q \sim E_0\ . \qquad (1)$$



Сили, що розриватимуть сферу пропорційні індукованому зарядові й напруженості зовнішнього поля:

$$F \sim \sigma_q S_{пов} E_0\ , \qquad (2)$$

де $S_{пов} = 4\pi R_0^2$ – площа поверхні сфери.

Враховуючи (1) і (2), для сили запишімо:

$$F=\alpha R_0^2E_0^2\ .$$

Нехай розрив сфери настає по перерізу 1-2. При розриві механічна напруга в перерізі 1-2 досягає межі міцності:

$$\sigma_м=\frac{F}{S_{пер}}=\frac{\alpha R_0^2E_0^2}{2\pi R_0 d}\ , \qquad (3)$$

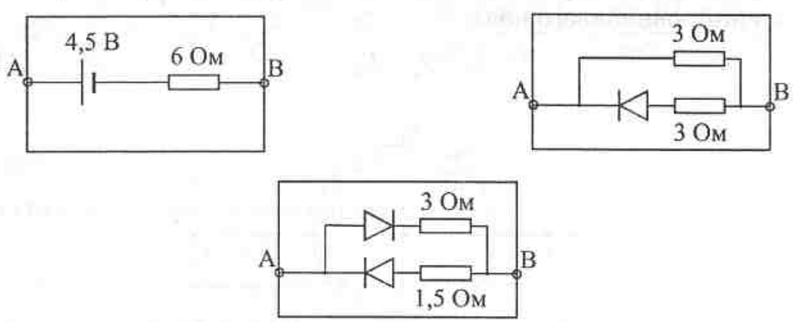
де $S_{пер}=2\pi R_0 d$ – площа перерізу сфери в перерізі 1-2. У другому випадку, якщо настає розрив, механічна напруга теж досягає межі міцності:

$$\sigma_м=\frac{F_1}{S_{пер1}}=\frac{\alpha R_1^2E_1^2}{2\pi R_1 d}\ ,\ R_1=2R_0\ . \qquad (4)$$

З (3) і (4) випливає:

$$\frac{\alpha R_0^2E_0^2}{2\pi R_0 d}=\frac{\alpha\cdot 4R_0^2E_1^2}{2\pi\cdot 2R_0 d}\text{, отже } E_1=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\ .$$

3 (118). Найпростіші варіанти схеми „чорної скриньки":



4 (119). Визначімо час t_1 польоту каменя вгору:

$$H=v_0t_1-\frac{gt_1^2}{2}\text{, звідси } t_1=\frac{v_0-\sqrt{v_0^2-2gH}}{g}=1\,\text{с}\ .$$

Визначімо час t_2 падіння і його швидкість у момент удару об карниз:

$$H=\frac{gt_2^2}{2}\text{, звідси } t_2=\sqrt{\frac{2H}{g}}=2\,\text{с}\ ,\ v=v_0-gt_1=15\,\text{м/с}\ .$$

Тоді $\Delta t=t_0-t_1-t_2=0{,}01\,\text{с}$ – час удару.

Запишімо другий закон Ньютона для удару:

$$F_c\cdot\Delta t=\Delta p=mv\ ,$$

Отже, середня сила удару: $F_c=\dfrac{mv}{\Delta t}=15\ \text{Н}$.

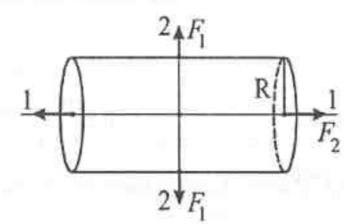
5 (120). Розгляньмо трубу закриту з торців. Нехай труба має товщину *h*, довжину *l*, радіус *R*. Розрив по перерізу 1-1. Механічна напруга σ_1, що виникає в цьому перерізі:

$$S_{пер1}=(2l+4R)h\ .$$

$$\sigma_1=\frac{F_1}{S_{пер1}}\ ,\ F_1=p\cdot S_{лоб1}=p\cdot 2Rl\ .$$

Сила тиску на напівциліндричну поверхню дорівнює силі тиску на площину, площа якої дорівнює площі лобового перерізу кривої поверхні. Тоді:

$$\sigma_1=\frac{p\cdot 2Rl}{(2l+2R)h}.$$



Розрив по перерізу 2-2.

$$\sigma_2=\frac{F_2}{S_{пер2}}=\frac{p\cdot\pi R^2}{2\pi Rh}=\frac{pR}{2h}.$$

Порівняймо механічні напруги

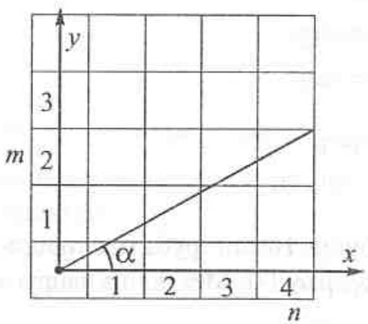
$$\sigma_1-\sigma_2=\frac{p}{2h}\left(\frac{2Rl}{l+R}-R\right)=\frac{pR(l-R)}{2h(l+R)}$$

при $l>R$ (що і буває найчастіше) $\sigma_1>\sigma_2$. Це означає, що ймовірність розриву по перерізу 1-1 більша.

11-й клас

1993

1 (121). Відбивання кулі від бортів стола абсолютно пружні, тобто траєкторія руху кулі співпадатиме з світловим променем, за умови заміни бортів стола дзеркалами. Замінімо борти стола дзеркалами і побудуймо зображення дзеркал одне в одному. Тоді хід променя при відбиванні від дзеркала можна зобразити прямою лінією (див. рис.).



Як видно з рисунка

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{(m+1/2)}{(n+1/2)} . \qquad (1)$$

Якщо кулю запустити під довільним кутом α, то завжди знайдуться такі цілі числа m та n, для яких виконуватиметься рівність (1). При довільному куті α куля попаде в ямку, при цьому вона здійснить $N = m + n$ (де m та n – найменші два цілих числа, для яких виконується (1)) відбивань від бортів і пройде відстань:

$$S = a\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2} ,$$

за час:

$$t = \frac{a}{v}\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2} .$$

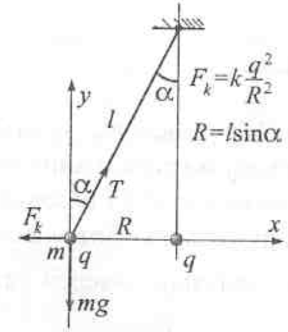
2 (122). Кулька рухається по колу. Застосуймо другий закон Ньютона:

OY: $$T\cos\alpha = mg \text{, звідси } T = \frac{mg}{\cos\alpha} . \qquad (1)$$

OX: $$ma_д = m\omega^2 R = 4m\pi^2\nu^2 l\sin\alpha = T\sin\alpha - F_к . \qquad (2)$$

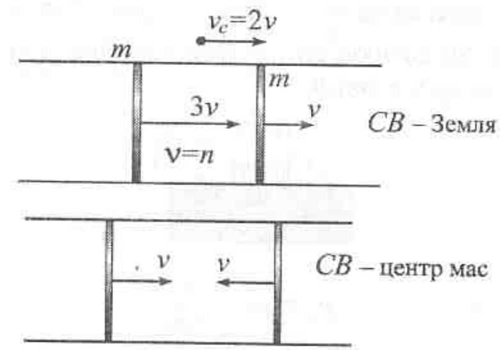
З (2) врахувавши (1), отримаймо:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m l^3 \sin^3\alpha}} .$$



3 (123). Нехтуючи масою газу, визначімо швидкість центра мас системи:

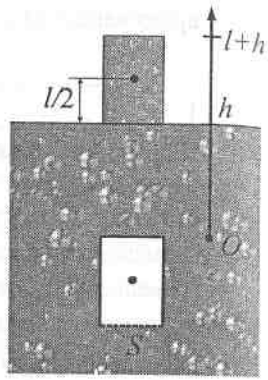
$$v_c = \frac{mv + 3mv}{2m} = 2v .$$



Перейдімо у систему відліку центра мас. У цій системі поршні матимуть однакову швидкість, напрямлену назустріч. Коли поршні зупиняться, то температура газу буде максимальною, оскільки вся кінетична енергія поршнів перейде у внутрішню:

$$2\cdot\frac{mv^2}{2} = \Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T - T_0) ,$$

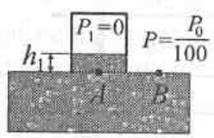
звідси $$T = T_0 + \frac{2mv^2}{3\nu R}\ .$$



4 (124). Унаслідок дії атмосфери на воду в кінцеву мить виймання склянки вона заповнена водою. Робота зовнішніх сил по підніманню склянки витрачається на збільшення потенціальної енергії склянки $mg(h+l)$, і води $\rho lSg\frac{l}{2}$ (вважаймо, що вода у склянку попала з поверхні озера).

$$A = mg(h+l) + \frac{1}{2}\rho Sl^2 g = 0{,}57\ \text{Дж}\ .$$

У випадку зменшення атмосферного тиску у 100 разів у момент виймання вся склянка не заповниться водою. Визначімо рівень h_1 води у склянці. За законом сполучених посудин тиск у точці A дорівнюватиме тиску у точці B.



$$p_A = p_B = \frac{p_0}{100}\ .$$

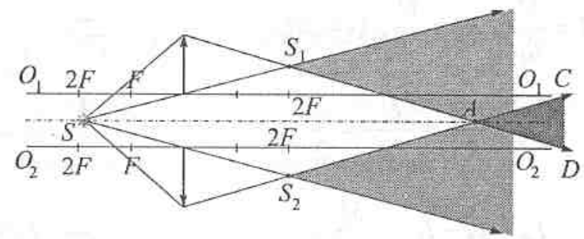
Знайдімо тиск у точці A:

$$p_A = mgh_1\ ,$$

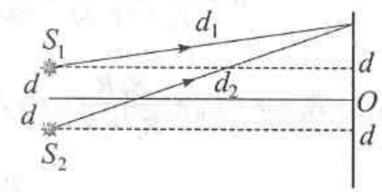
звідси $$h_1 = \frac{p_0}{100\rho g} = 0{,}01\ \text{м}\ .$$

Тоді: $$A_1 = mg(h+l) + \rho Sh_1 g\frac{h_1}{2} = 0{,}45\ \text{Дж}\ .$$

5 (125). Розрізання й розсування лінзи привело до того, що ми отримали однакові лінзи з фокусними відстанями F і головними оптичними осями на відстані d. Якщо джерело світла знаходиться на відстані $2F$, то і його зображення буде на відстані $2F$ (перевірте, скориставшись формулою лінзи).



Зображення S_1 і S_2 можна розглядати як два когерентних джерела світла, і тому в області перетину хвиль ($DACD$) спостерігатиметься інтерференція. Положення максимумів (мінімумів) інтерференції на екрані визначатиметься різницею ходу хвиль:



$$\Delta d = |d_2 - d_1| = \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_1 + d_2} =$$

$$= \frac{(L^2 + (d+x)^2 - (L^2 + (x-d)^2))}{2L} = \frac{2xd}{L}\ . \qquad (1)$$

(Враховано, що $L >> F >> d$, тому $d_1 + d_2 \approx 2L$).

Інтерференційні максимуми на екрані спостерігатимуться за умови:

$$\Delta d = k\lambda = \frac{2x_{макс.}d}{L},$$

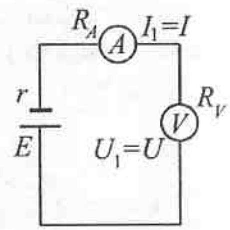
де $x_{макс.} = k\lambda L/2d$ – координати інтерференційних максимумів.

Мінімуми – $\Delta d = (k+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{2x_{мін.}d}{L}$, де $x_{мін.} = \frac{(2k+1)\lambda L}{4d}$ – координати інтерференційних мінімумів.

1994

1 (126). Запишімо закон Ома для замкнутого кола:

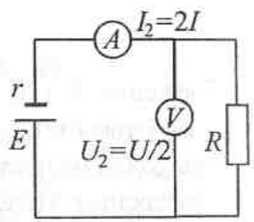
$$r + R_A + R_V = \frac{E}{I} \qquad (1)$$



$$I = \frac{U}{R_V},\; R_V = \frac{U}{I},\; U = IR_V .$$

$$I_{V2} = \frac{U_2}{R_V} = \frac{U}{2R_V} = \frac{I}{2}$$

$$I_R = I_2 - I_{V2} = \frac{3I}{2} .$$



$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U \cdot 2}{2 \cdot 3I} = \frac{R_V}{3} .$$

$$R_x = r + R_A + \frac{R_V R}{R_V + R} = r + R_A + \frac{R_V^2/3}{4R_V/3} =$$

$$= r + R_A + \frac{R_V}{4} = \frac{E}{2I} . \qquad (2)$$

Від (1) віднімімо (2):

$$\frac{3R_V}{4} = \frac{E}{2I}, \text{ звідси } IR_V = U = \frac{2}{3}E = 6\,\text{В}.$$

$U_2 = \dfrac{U}{2} = 3\,\text{В}$ – новий показ вольтметра.

2 (127). Визначімо тиск суміші газів до стискання за законом Дальтона, як суму парціальних тисків газів:

$$p_1 = p_{11} + p_{12} = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V} + \frac{m_2 RT}{\mu_2 V} .$$

Кінцевий тиск суміші за законом Бойля-Маріотта:

$$p_1 V = p_2 \frac{V}{3} ,$$

$$p_2 = 3p_1 = \frac{3RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) = 1{,}8 \cdot 10^5\ \text{Па} .$$

3 (128). Коли струм досягає максимального значення (швидкість зростання струму: $\frac{di}{dt} = 0$), тоді $E_{c.i.} = 0$. Це означає, що напруга на резисторі дорівнює напрузі на конденсаторі.

$$\frac{q_0}{C} = I_0 R ,$$

звідси

$$q_0 = I_0 RC .$$

Напруга на котушці індуктивності у цей момент:

$$U_L = E_{c.i.} = 0 .$$

Визначімо максимальний струм після замикання ключа K_2 за законом збереження енергії:

$$\frac{q_0^2}{2C} + \frac{LI_0^2}{2} = \frac{LI_{макс.}^2}{2} ,$$

$$I_{макс.} = I_0\sqrt{1 + \frac{R^2 C}{L}} .$$

4 (129). Санки рухаються рівномірно, отже повна реакція опори $\vec{N}_1 = \vec{N} + \vec{F}_{mp}$ дорівнює силі тяжіння (див. рис. 1.) і напрямлена вертикально вгору.

Коли собака стрибає, зростає сила нормальної реакції N, але одночасно зростає у стільки ж разів сила тертя μN, тому повна реакція так само зростає, але залишається вертикальною.

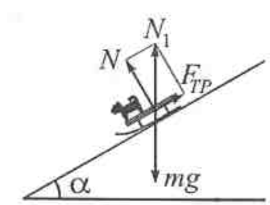
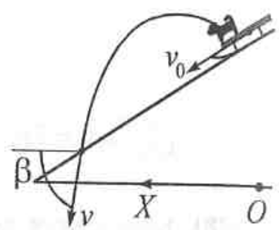


Рис. 1.

Скористаймось законом збереження імпульсу по горизонтальній вісі. Ми маємо на це право, тому що під час стрибка на систему тіл санки-хлопчик-собака діють тільки вертикально напрямлені зовнішні сили, а при польоті горизонтальна складова швидкості собаки не змінюється.



$$Mv_0\cos\alpha = (M-m)v_1\cos\alpha + mv\cos\beta\ ,$$

звідси $\quad v_1 = \dfrac{2Mv_0 - mv}{2(M-m)}\ .$

5 (130). Протягом першої секунди струм рівномірно зростає, тому:

$$E_{c.i.1} = L\frac{di_1}{dt} = 4 \text{ відн.од.}$$

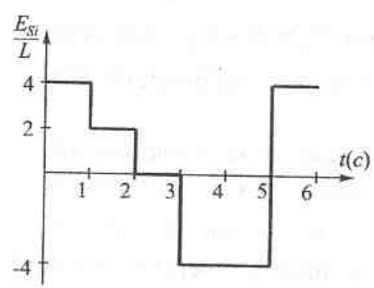
Протягом другої секунди: $\quad E_{c.i.2} = L\dfrac{di_2}{dt} = 2$ відн. од.

Протягом третьої секунди: $E_{c.i.3} = L\dfrac{di_3}{dt} = 0$.

Протягом четвертої та п'ятої секунд струм спадає:

$$E_{c.i.45} = L\frac{di_{45}}{dt} = -4 \text{ відн. од.}$$

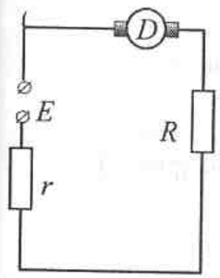
Протягом шостої секунди: $E_{c.i.6} = L\dfrac{di_6}{dt} = 4$ відн. одн.



1995

1 (131). В електричному колі діє дві ЕРС – джерела струму E та ЕРС індукції E_i, що виникає при обертанні якоря електродвигуна і напрямлена проти ЕРС джерела. Закон Ома має вигляд:

$$E - E_i = IR\ , \qquad (1)$$



де R – повний опір кола.

У випадку нерухомого якоря $E_{i0} = 0$, тоді

$$E = I_0 R\ , \text{ звідси } R = \frac{E}{I_0}\ . \qquad (2)$$

Помножімо рівність (1) на I:

$$EI = I^2R + E_iR\ . \qquad (3)$$

Ліва частина рівняння – це повна потужність джерела струму EI, права – I^2R – потужність теплових втрат, а

$$E_iR = N \qquad (4)$$

– механічна потужність двигуна, яка дорівнюватиме:

$$N = Fv\ . \qquad (5).$$

З (3), врахувавши (2), (4) та (5), отримаймо:

$$F = \frac{EI(I_0 - I)}{I_0 v} = 12500\text{ Н}\ .$$

Знайдімо ККД електровоза:

$$\eta = \frac{N}{EI} = \frac{I(E-IR)}{EI} = \frac{I_0 - I}{I} = 0{,}5 = 50\ \%\ .$$

2 (132). Оскільки закони послідовного з'єднання конденсаторів та паралельного резисторів аналогічні й навпаки (послідовне – $R = R_1 + R_2$, $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$; паралельне – $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$, $C = C_1 + C_2$).

Замінімо коло, що складається з однакових конденсаторів, колом, що складається з однакових опорів, але складеним так, що всі послідовні з'єднання конденсаторів замінені на паралельні з'єднання опорів, а паралельні з'єднання конденсаторів – на послідовні з'єднання опорів.

Наприклад:

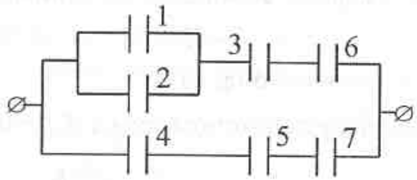


Рис. 1.

Коло з конденсаторів (рис.1) замінімо колом опорів (рис. 2):

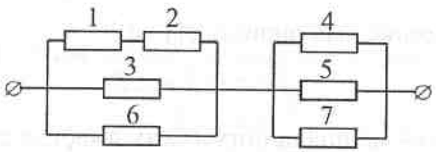


Рис. 2.

Нехай при теоретичних розрахунках ємність батареї конденсаторів дорівнювала $C_x = \alpha_1 C$ (C – ємність одного конденсатора).

Визначімо загальний опір кола (рис. 2): $R_x = \dfrac{U}{I}$, склавши електричне коло (рис. 3) і представмо $R_x = \alpha_2 R$ (R – опір одного резистора визначімо, склавши аналогічне коло). Для більшої точності скористаймось методом, запропонованим у задачі **48**.

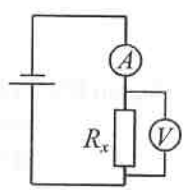


Рис. 3

Якщо $\alpha_1 = \alpha_2$, то теоретичні розрахунки C_x правильні.

Примітка: Якщо в колі є з'єднання зіркою його замінюють на трикутник опорів і навпаки. Але в цьому випадку однаковими опорами не обійтись.

3 (133). За третім законом Кеплера відношення куба великої півосі еліпса до квадрата періода обертання супутника величина стала. Визначімо цю константу (рис. 1.).

Запустімо супутник по коловій орбіті радіусом R навколо планети масою M

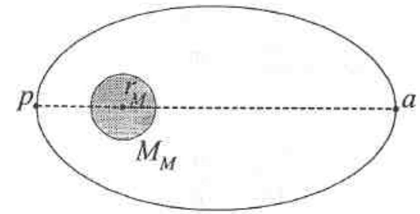


Рис.1.

Другий закон Ньютона для руху по колу:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{\gamma mM}{R^2} \quad . \tag{1}$$

Врахуймо:
$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad , \tag{2}$$

тоді
$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R} = \frac{\gamma M}{R^2} \quad .$$

Знайдімо шукану константу:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} = const \; . \tag{3}$$

Для руху супутника навколо Марса (рис. 2):

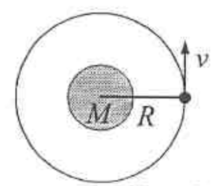


Рис. 2.

$$R_n = p + R_M , \quad R_a = a + R_M ,$$

звідси
$$R = \frac{R_p + R_a}{2} = R_M + \frac{p+a}{2} = 16600 \text{ км} . \tag{4}$$

Третій закон Кеплера для супутника Марса має вигляд:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{\gamma M_M}{4\pi^2} \quad . \tag{5}$$

Запустімо супутник навколо Землі біля самої її поверхні й запишімо третій закон Кеплера:

$$\frac{R_3^3}{T_3^2}=\frac{\gamma M_3}{4\pi^2}\ . \tag{6}$$

Поділімо (5) на (6):

$$\frac{M_M}{M_3}=\frac{R^3}{R_3^3}\frac{T_3^2}{T^2}\ . \tag{7}$$

Період обертання супутника біля поверхні Землі:

$$T_3=\frac{2\pi R_3}{v_1}\ , \tag{8}$$

де $v_1=\sqrt{R_3 g}$ (9) – перша космічна швидкість для Землі.
Підставмо (9) у (8) та (7):

$$\frac{M_M}{M_3}=\frac{4\pi^2R^3}{gT^2R_3^3}=0{,}1\ .$$

4 (134). Якщо заряд влітає перпендикулярно до ліній магнетного поля, то він рухатиметься по колу:

$$qvB=m\frac{v^2}{R}\ ,\quad \text{звідси}\quad R=\frac{mv}{qB}\ .$$

Кінетична енергія заряду $E=\dfrac{mv^2}{2}$, отже $v=\sqrt{\dfrac{2E}{m}}$.

Тоді: $$R=\frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2E}{m}}=\frac{\sqrt{2Em}}{qB}\ .$$

Маса атома U^{235} – $m_1=235\cdot1{,}66\cdot10^{-27}$ кг, тоді $R_1=\dfrac{\sqrt{2Em_1}}{qB}$,

для U^{238}: $m_2=238\cdot1{,}66\cdot10^{-27}$ кг і $R_2=\dfrac{\sqrt{2Em_2}}{qB}$.

Отже, $$l=2(R_2-R_1)=\frac{2\sqrt{2E}}{eB}\left(\sqrt{m_2}-\sqrt{m_1}\right),$$

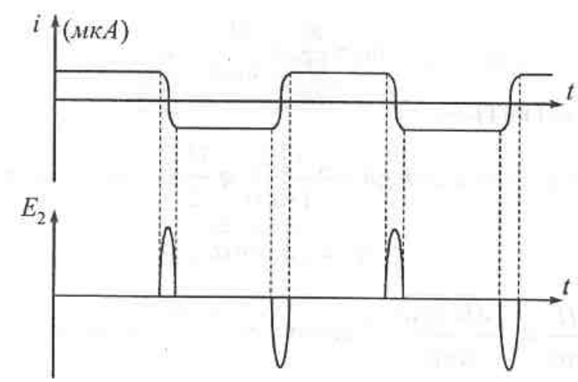
$$B=\frac{2\sqrt{2E}}{el}\left(\sqrt{m_2}-\sqrt{m_1}\right)=0{,}4\ \text{мТл}\ .$$

Сила йонного струму: $I=\dfrac{q}{t}$,

отже $$t=\frac{q}{I}=\frac{eN}{I}=\frac{emN_A}{I\mu}=4\cdot10^8\ \text{с}\approx12{,}6\ \text{років}\ ,$$

де $N=\dfrac{m}{\mu}N_A$ – кількість йонів у 1 кг урану.

5 (135). Діоди ввімкнені назустріч один одному, тому струм у первинній обмотці визначають зворотнім струмом діодів. Зобразімо осцилограму струму:



ЕРС у вторинній обмотці виникає зі зміною струму у первинній обмотці, напрями ЕРС різні, тому, що струм, то зменшується, то збільшується.

1996

1 (136). Розгляньмо випадок, коли довжина вагонів l більша від довжини схилів гірки (рис. 1) $l \geq \dfrac{2H}{\sin\alpha}$.

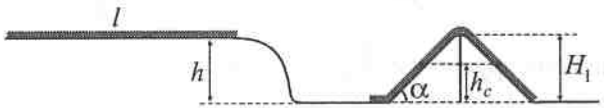


Рис. 1.

Вагони переїдуть гірку, якщо вони досягнуть такого положення, яке зображено на рис. 1.
Запишімо закон збереження енергії:

$$mgh = m_1 g \frac{H_1}{2}\,, \qquad (1)$$

де m_1 – маса вагонів на гірці, $h_c = \dfrac{H_1}{2}$ – висота центру мас тої частини вагонів, що знаходиться на гірці.

$$m_1 = \frac{m}{l}\cdot 2\frac{H_1}{\sin\alpha}\,.$$

Підставмо (2) в (1):

$$mgh = 2\frac{mH_1}{l\sin\alpha} g \frac{H_1}{2}\,,$$

звідси $$H_1 = \sqrt{hl\sin\alpha}\,.$$

При $l \geq \dfrac{2H}{\sin\alpha} = \dfrac{2\sqrt{hl\sin\alpha}}{\sin\alpha}$, маємо $h \leq \dfrac{l\sin\alpha}{4}$, отже $h \leq \dfrac{l}{4}$.
Цей випадок не задовільняє умову задачі.

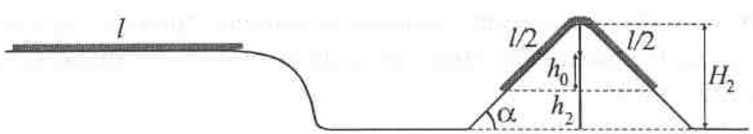


Рис. 2.

З рис. 2 маємо:

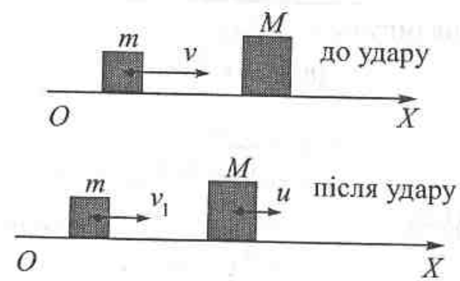
$$h_0 = \frac{l}{2}\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\,,$$

тоді $$mgh = mg\left(\frac{l}{4}\sin\alpha + h_2\right),$$

звідси $$h_2 = h - \frac{l}{4}\sin\alpha\,,$$

отже $$H_2 = h_2 + 2h_0 = h + \frac{l}{4}\sin\alpha\,.$$

2 (137). Розгляньмо непружний удар. Зовнішні сили діють по вертикалі.



Запишімо закон збереження імпульсу для горизонтальної вісі OX:

OX: $$mv = mv_1 + Mu\,. \qquad (1)$$

Закон збереження енергії:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + Q\,. \qquad (2)$$

З (1) отримаймо: $$v = \frac{mv_1 + Mu}{m}\,, \qquad (3)$$

отже $$Q = \frac{m}{2}\left(v^2 - v_1^2\right) - \frac{Mu^2}{2} = \frac{Mu}{2m}\left(2mv_1 + Mu - mu\right). \qquad (4)$$

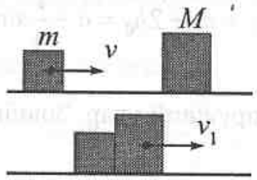
Проаналізуймо цей вираз на екстремум.

$$\frac{\partial Q}{\partial v_1}=\frac{M}{2m}\left[\frac{\partial u}{\partial v_1}(2mv_1+Mu-mu)-u\left(2m+(M-m)\frac{\partial u}{\partial v_1}\right)\right]=0\,,$$

$$2mv_1+Mu-mu-2mu-(M-m)u=0\,,$$

звідси $$v_1=u\,. \qquad (5)$$

Кількість теплоти досягне максимального значення при $v_1=u$, тобто зіткнення абсолютно непружне.



Закон збереження імпульсу:

$$(m+M)v_1=mv\,,$$

звідси $$v_1=\frac{mv}{(m+M)}\,.$$

Підставмо (6) в (2):

$$Q=\frac{mv^2}{2}\left(\frac{M}{m+M}\right).$$

Якщо маса бруска набагато більша від маси кулі,тоді вся її кінетична енергія перетвориться у внутрішню:

$$Q\approx K \text{ при } M>>m\,.$$

3 (138). Розгляньмо кубик у системі відліку Земля:

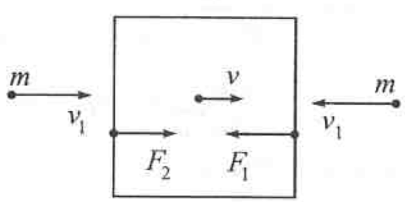


Рис. 1.

Сила опору F_0 дорівнює різниці сил тиску газу на передню і задню стінки кубика:

$$F_0=F_1-F_2 \qquad (1)$$

Визначімо силу тиску газу на передню і задню стінки кубика. Перейдімо у систему відліку зв'язану з кубиком.

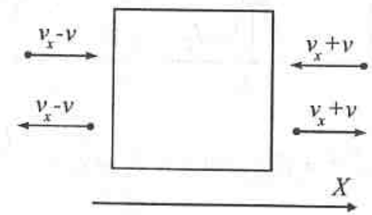


Рис. 2.

Розрахуймо кількість зіткнень з передньою стінкою:

$$z_1=\frac{1}{2}nS(v_x+v)t\,.$$

Зміна імпульсу частинки:

$$\Delta p_{1x}=2(v_x+v)m$$

(якщо розглянути строгіше, то частинки відлітають не зі швидкістю v_x+v, а з швидкістю v_x, що відповідає температурі кубика).

Тоді сили:

$$F_1=\frac{z_1\Delta p_{1x}}{t}=\frac{nS(v_x+v)t\cdot 2(v_x+v)m}{2t}=mnS(v_x+v)^2\,, \qquad (2)$$

$$F_2=mnS(v_x-v)^2\,. \qquad (3)$$

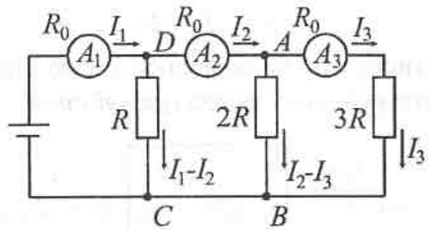
Підставмо (2), (3) у (1) та знайдімо силу опору:

$$F_{on}=mnS\left[(v_x+v)^2-(v_x-v)^2\right]=4mnSv_xv=4mnSv\sqrt{\frac{RT}{\mu}}=$$

$$=4mnl^2v\sqrt{\frac{RT}{\mu}}=4m\frac{p}{kT}l^2v\sqrt{\frac{RT}{\mu}}=4pl^2v\sqrt{\frac{m}{kT}}\,,$$

де p – тиск газу.

4 (139). Врахуймо, що опір амперметра R_0.



Тоді: $U_{AB} = I_3(3R + R_0)$, звідси $I_2 = I_3 + \dfrac{I_3(3R+R_0)}{2R}$. (1)

$$U_{CD} = U_{AB} + I_2R_0 = I_3(3R+R_0) + I_2R_0 ,$$

отже $$I_1 = \frac{I_3(3R+R_0)+I_2R_0}{R} + I_2 . \quad (2)$$

З (1) отримаймо: $$\frac{R_0}{R} = 2\frac{I_2}{I_3} - 5 . \quad (3)$$

З (2) – $$I_1 = I_2 + 3I_3 + I_3\frac{R_0}{R} + I_2\frac{R_0}{R} . \quad (4)$$

Підставмо (3) в (4):

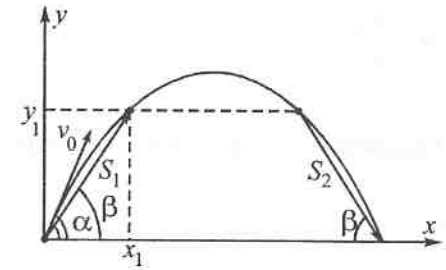
$$2I_2^2 - 2I_3I_2 - (2I_3 + I_1)I_3 = 0 ,$$

$$I_2 = \frac{I_3 + \sqrt{I_3^2 + 2I_3(2I_3+I_1)}}{2} = 3\,\text{мА} .$$

5 (140). У спектрі випромінювання нитки розжарення (температура нитки дорівнює $t = 1500 - 2000°\text{C}$) переважають світлові хвилі, що відповідають червоній ділянці спектру. Матове скло більше розсіює фіолетове світло, а менше червоне, тому у напрямку спостерігача поширюватимуться переважно світлові хвилі червоної ділянки спектру. Завдяки цьому нитка розжарення виглядає червоною.

1997

1 (141). Оскільки траєкторія симетрична (парабола), то модуль переміщення S_2 за останню секунду дорівнює модулеві переміщення за першу секунду S_1.



$$x_1 = v_0 t\cos\alpha ,$$

$$y_1 = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} ,$$

звідси

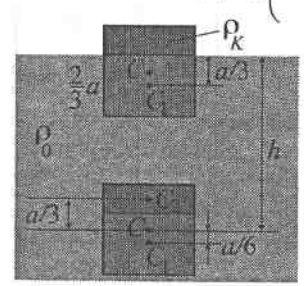
$$S_1 = S_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(v_0 t\cos\alpha)^2 + \left(v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)^2} = 26\,\text{м} ,$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{y_1}{x_1} = \frac{v_0\sin a - \dfrac{gt}{2}}{v_0\cos a} \approx 1{,}4 ,\ \beta \approx 54° .$$

2 (142). Робота сторонніх сил, потрібна для занурення куба, дорівнює зміні потенціальної енергії системи, тобто куба $\Delta E_к$ та води $\Delta E_в$.

$$A = \Delta E_к + \Delta E_в =$$

$$= -\rho_к a^3 g\left(h - \frac{a}{6}\right) + \rho_0\frac{a^3}{3}g\left(h - \frac{a}{3}\right) + \rho_0\frac{2a^3}{3}g\left(h - \frac{a}{6}\right) . \quad (1)$$



$$\rho_0\frac{a^3}{3}g\left(h - \frac{a}{3}\right) = \Delta E_{в1} ,$$

а $$\rho_0\frac{2a^3}{3}g\left(h - \frac{a}{6}\right) = \Delta E_{в2} .$$

Визначімо густину куба з умови рівноваги у початковому стані:

$$F_A = m_\kappa g\text{ , звідси } \rho_\kappa g a^3 = \rho_0 g\frac{2a^3}{3}\text{ , і } \rho_\kappa = \frac{2}{3}\rho_0 \ .$$

Підставмо (2) у (1):

$$A = \rho_0\frac{2a^3}{3}g\left(h-\frac{a}{3}\right) = 80\text{ Дж} \ .$$

$\Delta E_{в2} = \rho_0\frac{2a^3}{3}\left(h-\frac{a}{6}\right)g$ – зміна потенціальної енергії об'єму води C_1 (див. рис.).

$\Delta E_{в1} = \rho_0\frac{a^3}{3}\left(h-\frac{a}{3}\right)g$ – зміна потенціальної енергії об'єму води C_2.

Цей об'єм води переміщається у нескінчено тонкий шар на поверхню. Шукана робота не залежить від орієнтації куба під водою, оскільки зміна потенціальної енергії тіла визначається положенням його центра мас.

3 (143). Запишімо перший закон термодинаміки $Q = A' + \Delta U$, де A' – робота газу, яка дорівнює добутку середньої сили тиску газу на переміщення поршня:

$$A' = S\frac{(p_1+p_2)}{2}\alpha l \ . \qquad (1)$$

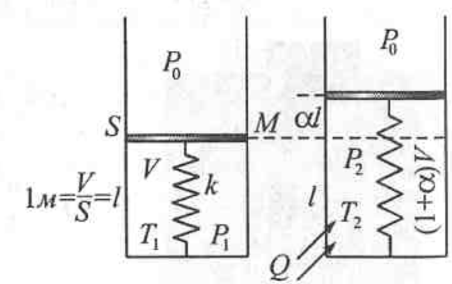
Знайдімо тиск у початковому стані:

$$p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S} \ , \qquad (2)$$

у кінцевому стані:

$$p_2 = p_0 + \frac{Mg}{S} + \frac{k\alpha l}{S} \ . \qquad (3)$$

(2) і (3) підставмо у (1):



$$A = \left(p_0 S + Mg + \frac{k\alpha l}{2}\right)\alpha l = 10^4\text{ Дж} \ .$$

Запишімо рівняння стану для початкового та кінцевого станів газу:

$$p_1 Sl = \nu RT_1\ ,\ \ p_2 S(1-\alpha)l = \nu RT_2\ ,$$

звідси

$$T_2 - T_1 = (p_2 - p_1)(1-\alpha)\frac{Sl}{\nu R} \ .$$

$$\Delta U = \frac{i}{2}R\nu\Delta T =$$

$$= \frac{5Sl}{2}\left((1-\alpha)\left(p_0 + \frac{Mg}{S} + \frac{k\alpha l}{S}\right) - \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)\right) = 2{,}5\cdot 10^4\text{ Дж} \ .$$

$$Q = 3{,}5\cdot 10^4\text{ Дж} = 35\text{ кДж} \ .$$

4 (144).

а) Перейдімо в систему відліку, що обертається.

Тоді зовнішні дії на електрон зрівноважаться $F_е = F_в$, де $F_е = eE_x$ – сила з боку електричного поля, що виникає у стрижні,

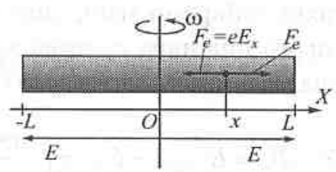


Рис. 1.

$F_в = m\omega^2 x$ – відцентрова сила:

$$eE_x = m\omega^2 x\ , \qquad E_x = \frac{m\omega^2 x}{e} \qquad (1)$$

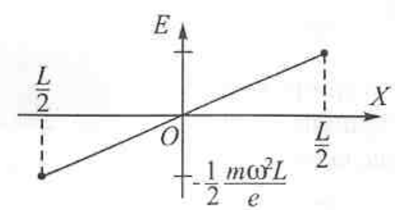


Рис. 2.

б) Якщо електричне поле однорідне, то різниця потенціалів для двох точок, що лежать на лінії напруженості $\Delta\varphi = E\Delta x$. Для неоднорідного поля $d\varphi = E_x dx$, тоді:

$$U = \Delta\varphi = \int_0^{L/2} E_x dx = \int_0^{L/2} \frac{m\omega^2 x}{e} dx = \frac{m\omega^2 L^2}{8e}.$$

в) Для визначення розподілу густини заряду у стрижні скористаймось теоремою Остроградського-Гауса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{вн}}{\varepsilon_0}$$

– потік напруженості електричного поля крізь замкнуту поверхню (у цьому випадку циліндрична поверхня $ABCD$) дорівнює заряду обмеженому цією поверхнею поділеному на електричну сталу. Розміри циліндричної поверхні вибиремо малі, щоб у межах цього циліндра густина заряду залишалась постійною (рис. 3).

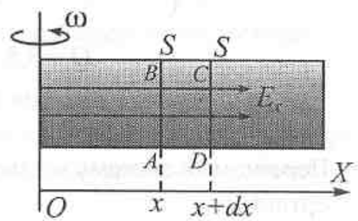


Рис. 3.

$$\oint_S EdS = \Phi_E = E_{x+dx}S - E_x S = \left(\frac{m\omega^2(x+dx)}{e} - \frac{m\omega^2 x}{e}\right)S =$$

$$= \frac{Sm\omega^2 dx}{e} = \frac{q_{вн}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_x S dx}{\varepsilon_0},$$

Знайдімо густину заряду у стрижні:

$$\rho_x = \frac{m\omega^2 \varepsilon_0}{e} = const.$$

Запишімо теорему Остроградського-Гауса для краю стрижня (рис. 4.) (ззовні стрижня поле відсутнє):

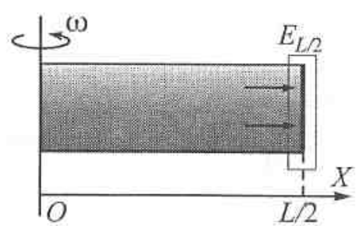


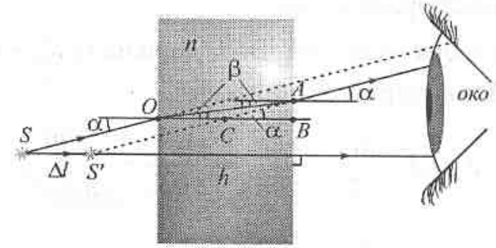
Рис. 4.

$$\Phi_E = -E_{L/2}S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},$$

Знайдімо поверхневу густину заряду на торцях стрижня:

$$\sigma = -E_{L/2}\varepsilon_0 = -\frac{m\omega^2 L\varepsilon_0}{2e}.$$

5 (145). Розгляньмо випадок, коли око людини „дивиться" на предмет нормально до площини пластинки. Вона бачитиме світну точку S у точці S' (див. рис.). Тобто око бачитиме предмет ближче на $\Delta l = OC$.



Всі кути на рисунку малі, тобто:

$\sin\alpha = \alpha$, $\sin\beta = \beta$, $\dfrac{\alpha}{\beta} = n$ – закон заломлення для точки O.

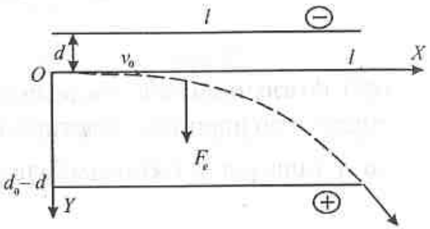
З ΔOAB, отримаймо $AB = h\,\mathrm{tg}\beta = h\beta$.

З ΔCBA – $CB = \dfrac{AB}{\mathrm{tg}\alpha} = \dfrac{AB}{\alpha} = \dfrac{h\beta}{\alpha}$.

Тоді: $\Delta l = OC = h - \dfrac{h\beta}{\alpha} = h\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$. Отже, якщо дивитись на світну точку крізь плоскопаралельну пластинку нормально до її поверхні, то бачитимемо її на $\Delta l = h\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ ближче. Оскільки предмет – це сукупність світних точок, то й предмет буде ближче на Δl. Розміри предмета не зміняться.

1998

1 (146). Рух електрона по вісі OX рівномірний: $l = v_0 t$,



звідси $t = \dfrac{l}{v_0}$

– час руху електрона в полі конденсатора. Мінімальна швидкість електрона, що пролітатиме крізь конденсатор, визначає зміщення електрона по вісі OY. Вона дорівнює: $d_0 - d$.

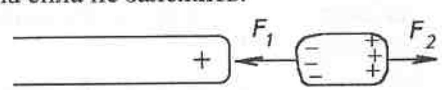
Рух по вісі OX рівноприскорений:

$$d_0 - d = \frac{at^2}{2} = \frac{eEt^2}{2m} = \frac{eUt^2}{2md_0} = \frac{eUl^2}{2md_0 v_0^2} ,$$

звідси $$v_0 = \sqrt{\frac{eUl^2}{2md_0(d_0-d)}} = 1200\,\frac{\text{км}}{\text{с}} .$$

При $v > v_0$ електрон пролетить через конденсатор.

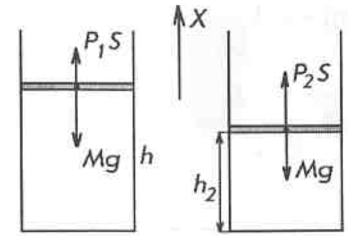
2 (147). Якщо піднести до зарядженого тіла клаптик паперу, то в папері під дією електричного поля відбуватиметься поляризація. Це приведе до виникнення поверхневих зарядів на клаптику. Електричне поле взаємодіятиме із наведеними зарядами. Сила F_1 , що діє на ближній заряд „–", більша від сили F_2 , що діє на дальній заряд „+". Результуюча сила направлена до гребінця. Отже, клаптик рухається в сторону зарядженого тіла. Від знаку заряду зарядженого тіла результуюча сила не залежить.



3 (148). Початковий стан – поршень у рівновазі:

$$P_1 S = Mg \quad . \qquad (1)$$

Застосуймо для поршня другий закон Ньютона.



Вісь OX:

$Ma = P_2 S - Mg$, звідси

$$P_2 S = M(a+g) \quad . \qquad (2)$$

Для ізотермічного процесу:

$$P_1 h S = P_2 h_2 S \quad . \qquad (3)$$

Підставмо (1) і (2) в (3):

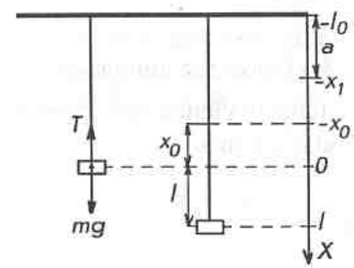
$$Mgh = M(a+g)h_2 ,$$

звідси $$h_2 = \frac{a}{a+g} h \; .$$

4 (149). Умова рівноваги:

$$T = mg = kx_0 \text{, звідси } x_0 = \frac{mg}{k} = 0{,}10 \text{ м} .$$

Рух тягарця від ($-x_0$) до (l) гармонійний, а від ($-x_0$) до ($-x_1$) і далі до ($-x_0$) – вільне падіння.



Період коливань T складатиметься з часу гармонійного руху t_1 і часу вільного падіння t_2 :

$$T = t_1 + t_2 .$$

Рівняння гармонійних коливань такого маятника $x = l\cos\omega t$, тоді:

$$t_1 = \frac{2}{\omega} \arccos\frac{-x_0}{l} .$$

Визначімо із закону збереження енергії швидкість маятника у точці ($-x_0$):

$$mg(l + x_0) + \frac{mv^2}{2} = \frac{k(x_0 + l)}{2} ,$$

звідси

$$v^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{k(x_0 + l)^2}{2} - mg(l + x_0)\right) .$$

Тоді час вільного падіння:

$$t_2 = \frac{2v}{g} .$$

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\arccos\left(-\frac{mg}{kl}\right) + \frac{2}{g}\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{k(x_0 + l)^2}{2} - mg(l + x_0)\right)} .$$

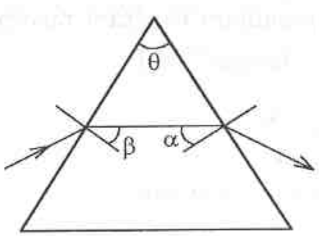
Визначімо висоту вільного польоту:

$$x_1 - x_0 = \frac{v^2}{2g}, \text{ звідси } x_1 = x_0 + \frac{1}{gm}\left(\frac{k(x_0 + l)^2}{2} - mg(l + x_0)\right).$$

Знайдімо мінімальну відстань від точки підвісу до тягарця:

$$a = l_0 - x_1 = l_0 - \frac{k(x_0 + l)^2}{2mg} + l .$$

5 (150). Найбільшому значенню $\theta = \alpha + \beta$ відповідає випадок найбільшого значення кутів a і b. Але найбільші значення цих кутів – це граничні кути повного внутрішнього відбивання

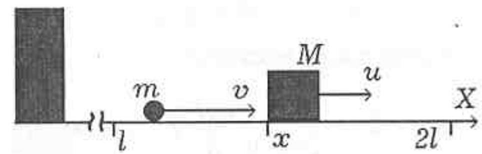


$$\alpha_0 = \arcsin\frac{1}{n} = 30° .$$

Отже, $\theta = 2\alpha_0 = 60°$.

1999

1 (151). Врахуймо, що m значно менша ніж M.



Вважаймо:

– час між ударами $t = 2x/v$ є дуже малий;

– швидкість куба u значно меншою від швидкості кульки v, тобто з кожним зіткненням куб отримуватиме імпульс $\Delta p_x = 2mv$, а модуль швидкості кульки змінюватиметься на $\Delta v_к = -2u$ (це легко зрозуміти, перейшовши в систему відліку куба);

– швидкість куба змінюється плавно.

При ударі прискорення кульки, усереднене за час t, дорівнюватиме:

$$a = v' = \frac{\Delta v}{t} = \frac{-2uv}{2x} ,$$

звідси $$v'x + uv = 0, \text{ або } v'x + vx' = 0 . \qquad (1)$$

(Врахуймо, що швидкість куба $u = x'$).

З (1) випливає, що $(vx)' = 0$, тобто $vx = const$,

$$v_0 l = v \cdot 2l ,$$

отже, $v = v_0/2$ – швидкість кульки в момент часу, коли куб перемістився на l.

Застосуймо закон збереження енергії для початкового й кінцевого станів:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2 \cdot 4} + \frac{Mu^2}{2}, \text{ звідси } u \approx \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{3m}{M}} = 0{,}27 \text{ м/с} .$$

2 (152). Визначімо кількість зіткнень молекул газу зі стінкою:

$$z=\frac{1}{6}\bar{n}vtS=\frac{1}{6}\frac{N}{V}\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}St\ .$$

Тоді кількість зіткнень однієї частинки зі стінками:

$$z_1=\frac{z}{N}=\frac{1}{6\sqrt[3]{V}}\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}\,t\approx 2{,}3\cdot 10^3\ .$$

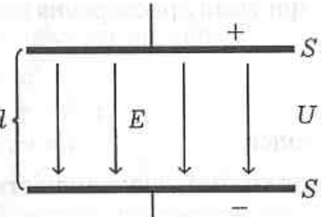
З урахуванням розподілу Максвелла кількість зіткнень зі стінкою посудини:

$$z=\frac{1}{4}n<v>St\ ,$$

тоді $$z_1=\frac{z}{N}=\frac{1}{4\sqrt[3]{V}}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}t=3{,}1\cdot 10^3\ .$$

3 (153). Модуль заряду пластин конденсатора визначається:

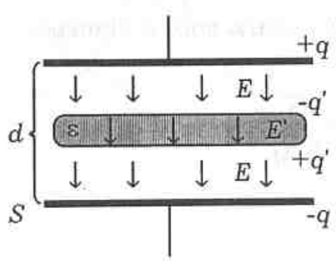
$$q=CU=\frac{\varepsilon_0 S}{d}U\ .$$



Напруженість електричного поля в конденсаторі дорівнює сумі полів окремих пластин. Поле однієї пластини дорівнює:

$$E_1=\frac{U}{2d}\ .$$

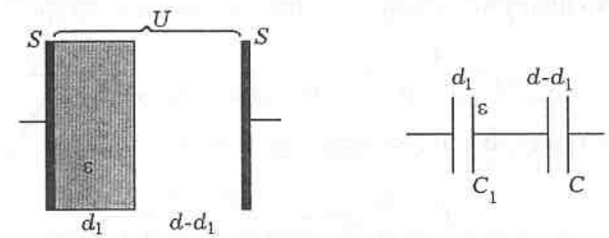
Друга пластина знаходиться у полі першої. Звідси випливає:



$$F=qE_1=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d^2}\ .$$

За третім законом Ньютона, на першу пластину діє така сама сила.

а) Якщо внести діелектрик у конденсатор, тоді внаслідок його поляризації у середині діелектрика виникне власне поле, що спричинить зменшення зовнішнього в межах діелектрика, але за межами діелектрика поле не зміниться (заряд конденсатора залишиться незмінним, тому що він від'єднаний від джерела).



Постійність поля за межами діелектрика легко зрозуміти, якщо діелектрик розглядати як додатковий конденсатор, який не створює поле за межами своїх пластин, а можемо скористатись і теоремою Остроградського-Гаусса. Отже, сила взаємодії пластин у випадку а) залишиться незмінною.

б) Цей конденсатор розгляньмо як два послідовно з'єднані конденсатори. (Скористаймось тим, що внесення тонкої провідної пластини у конденсатор не змінює його ємності, тобто на поверхню діелектрика завжди можна помістити тонкі металічні пластини і одержати два конденсатори з'єднані послідовно. Одна поверхня діелектрика торкається пластини конденсатора. Якби вона не торкалась пластини, потрібно було би розглядати три конденсатори з'єднаних послідовно, але від цього загальна ємність не зміниться). Сила взаємодії пластин у випадку б) зміниться внаслідок зміни заряду пластин (конденсатор під'єднаний до джерела). Розрахуймо ємність всієї системи:

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1}\cdot\dfrac{\varepsilon_0 S}{d-d_1}}{\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1}+\dfrac{\varepsilon_0 S}{d-d_1}}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\varepsilon(d-d_1)+d_1}\ .$$

Тоді заряд системи, як і заряд кожної пластини конденсаторів системи буде:

$$q = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 SU}{\varepsilon(d-d_1)+d_1}.$$

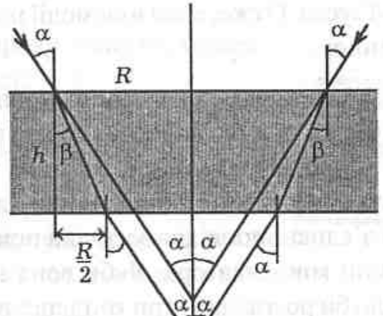
Знайдімо напруженість поля в другому конденсаторі:

$$E_2 = \frac{U_2}{d-d_1} = \frac{q}{C_2(d-d_1)} = \frac{\varepsilon U}{\varepsilon(d-d_1)+d_1}.$$

Знайдімо силу, яка діє на пластину конденсатора:

$$F = \frac{E_2}{2}q = \frac{\varepsilon^2 \varepsilon_0 SU^2}{2(\varepsilon(d-d_1)+d_1)^2}.$$

4 (154).

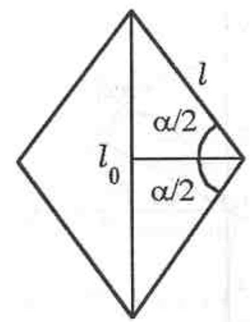


$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \text{ звідси } \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

З рисунка:

$$\frac{R}{2h} = \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}\quad h = \frac{R\sqrt{1-\sin^2\beta}}{2\sin\beta} = \frac{R\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{2\sin\alpha}.$$

5 (155). Знайдімо початкову довжину пружини:



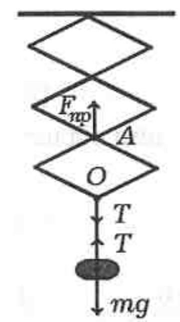
$$l_0 = 2l\sin\frac{\alpha}{2},$$

а кінцева – $l_1 = 2l\sin\frac{\beta}{2}$.

Видовження пружини під вантажем:

$$\Delta l = 2l\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

У стані рівноваги $T = mg$. Встановімо зв'язок між силою пружності і силою натягу нитки T, для чого змістімо точку O на нескінченно



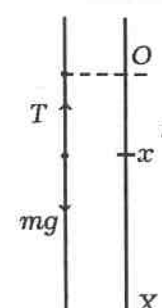
малу величину dx (щоб сили T і $F_{пр}$ можна було вважати незмінними), тоді роботи цих сил дорівнюватимуть одна одній:

$$Tdx = F_{пр}\frac{dx}{3}$$

(враховано, що точка A переміститься на $\frac{dx}{3}$),

звідси $\frac{F_{пр}}{3} = T$, тобто $\frac{k\Delta l}{3} = T = mg$.

Розгляньмо коливання системи. Для цього виведемо систему з положення рівноваги:



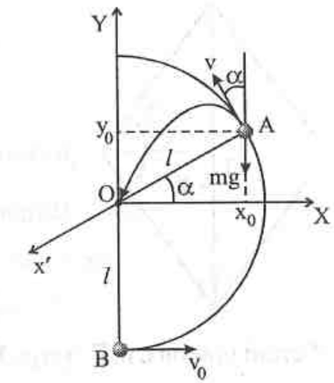
$$ma = mg - T$$

$$ma = mg - \frac{k(\Delta l + x/3)}{3} = mg - mg - \frac{kx}{9} = -\frac{kx}{9},$$

$$ma = -\frac{k}{9}x, \text{ звідси } \omega = \sqrt{\frac{k}{9m}} = \sqrt{\frac{g}{3\Delta l}}.$$

2000

1 (156). Нехай у т. А зникає сила натягу нитки $T=0$, тобто тіло переходить з колової на параболічну траєкторію. Запишімо другий закон Ньютона для тіла у т. А у проекції на вісь OX':



$$\frac{mv^2}{l}=mg\sin\alpha ,$$

звідси $v^2=lg\sin\alpha$. (1)

Застосуймо закон збереження енергії для точок В і А:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+mgl(1+\sin\alpha).$$

звідси
$$v_0=\sqrt{gl(3\sin\alpha+2)} . \qquad (2)$$

Запишімо рівняння руху для тіла кинутого з т. А у системі відліку XOY:

$$x=x_0+v_xt=l\cos\alpha-vt\sin\alpha=0 . \qquad (3)$$

$$y=y_0+v_yt+\frac{g_yt^2}{2}=l\sin\alpha+vt\cos\alpha-\frac{gt^2}{2}=0 . \qquad (4)$$

$x=0$, $y=0$ – умова попадання тіла в т. O.

З (3) отримаймо: $$t=\frac{l\cos\alpha}{v\sin\alpha},$$

а з (4): $$t=\frac{v\cos\alpha+\sqrt{v^2\cos^2\alpha+2lg\sin\alpha}}{g} .$$

З (1), (3), (4) випливає:

$$\frac{lg\sin\alpha\cos\alpha}{v\sin^2\alpha}=v\cos\alpha+\sqrt{v^2\cos^2\alpha+2v^2} . \qquad (5)$$

Розв'язавши рівняння (5), отримаймо:

$$\sin\alpha=\sqrt{3}/3 .$$

Знайдене значення підставмо у (2):

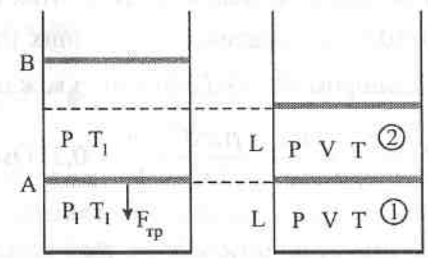
$$v_0=\sqrt{l(\sqrt{3}+2)g}=1{,}9\text{ м/с} .$$

2 (157). Врахуймо:

– газ одноатомний $c_p=\frac{5}{2}R$, $c_V=\frac{3}{2}R$ – молярні теплоємності газу при $P=const$ і $V=const$,

– поршень А теплопровідний – початкова й кінцева температури газів 1 і 2 – однакові,

– кількість газу $\nu=1$ моль.



Газ у верхній посудині нагрівається при $P=const$:

$$Q_2=c_p\nu\,\Delta T=\frac{5}{2}R\Delta T . \qquad (1)$$

Газ у нижній посудині нагрівається при $V=const$:

$$Q_1=c_V\,\nu\,\Delta T=\frac{3}{2}R\Delta T . \qquad (2)$$

Тобто: $$Q=Q_1+Q_2=c_V\Delta T+c_p\Delta T=4R\Delta T . \qquad (3)$$

У нижній посудині процес ізохорний:

$$\frac{P}{T}=\frac{P_1}{T_1}\text{, звідси } T_1=T\frac{P_1}{P},$$

тоді: $$\Delta T = T_1 - T = T\frac{P_1 - P}{P} = T\frac{F_{mp}}{PS} = \frac{F_{mp}PV}{PSR} = \frac{F_{mp}L}{R}\ . \qquad (4)$$

(Враховано:

1. Умова рівноваги поршня А: $PS + F_{mp} = P_1 S$;

2. $PV = \nu RT$, звідси $T = \frac{PV}{R} = \frac{PSL}{R}$).

З (3) і (4) отримаймо:

$$\frac{Q}{4R} = \frac{F_{mp}L}{R},\ \text{звідси}\ F_{mp} = \frac{Q}{4L} = 125\ \text{Н}\ .$$

3 (158). Паралелі глобуса є еквіпотенціальними лініями, це означає, що по них струм не йде, їх можна викинути. Між полюсами залишається $N = 360/10 = 36$ паралельно з'єднаних провідників довжиною $l = pd/2$ і опором $R_0 = \rho l$, тоді опір між полюсами:

$$R_x = \frac{R_0}{N} = \frac{\rho l}{N} = \frac{\rho \pi d}{2N} = \frac{\pi}{10} = 0{,}31\ \text{Ом}\ .$$

4 (159). Знехтуймо індуктивністю кільця, тоді внаслідок зміни магнетного потоку, що пронизує кільце в ньому виникатиме електрорушійна сила електромагнетної індукції:

$$\varepsilon_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BS_D)}{dt}\ .$$

За умовою задачі швидкість кільця змінюється мало ($\Delta v \ll v_0$). Вважаймо, що кільце рухається рівномірно, а це означає, що індукція магнетного поля у кільці зростає лінійно за час $t = \frac{a}{v_0}$ від 0 до B_0.

$$\varepsilon_i = \frac{B_0 S_D}{t} = \frac{B_0 S_D v}{a}\ .$$

Звідси випливає, що сила струму в кільці:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{B_0 S_D v_0}{aR}\ , \qquad (1)$$

площа кільця: $$S_D = \frac{\pi D^2}{4}\ , \qquad (2)$$

опір кільця: $$R = \rho_e \frac{l}{S_d}\ , \qquad (3)$$

довжина кільця: $$l = \pi D\ , \qquad (4)$$

площа перерізу дроту кільця:

$$S_d = \frac{\pi d^2}{4}\ . \qquad (5)$$

Теплові втрати в кільці:

$$Q = I^2 R \cdot 2t = \frac{B_0^2 S_D^2 v_0^2}{a^2 R^2} R \cdot 2\frac{a}{v_0} = \frac{2B_0^2 S_D^2 v_0}{aR}\ . \qquad (6)$$

Визначаючи Q, час взяли $2t$ тому, що час зростання поля дорівнює часові його зменшення і в обох випадках швидкість його зміни однакова, а отже і струм однаковий.
За законом збереження енергії:

$$Q = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2},\ \text{звідси}\ \frac{2Q}{m} = v_0^2 - v^2\ .$$

За умови $\Delta v \ll v_0$: $$-2v_0\,\Delta v = \frac{2Q}{m}\ ,$$

$$\Delta v = \frac{-Q}{mv_0} = -\frac{B_0^2 D^2}{8a\rho_e \rho} = -0{,}25\ \text{м/с}\ .$$

Враховано, що $m = \rho l S_d = \rho\pi D\frac{\pi d^2}{4}$ – маса кільця і (1) – (6).

$|\Delta v| = 0{,}25$ м/с $\ll v_0$, що узгоджується з умовою задачі.

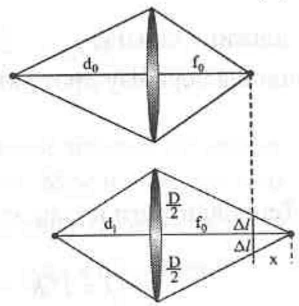
5 (160). Вважаймо, що „розмитість” контура зображення удвічі менша, від „розмитості” точки.

У першому випадку:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_0}+\frac{1}{f_0}\text{, звідси } f_0=\frac{d_0F}{d_0-F}\ . \qquad (1)$$

У другому випадку: $$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_0+x}\ . \qquad (2)$$

З другого рисунка:



$$\frac{x}{2\Delta l}=\frac{x+f_0}{D}\ ,$$

звідси $$x=\frac{2\Delta l\, f_0}{D-2\Delta l}\ ,$$

отже $$x+f_0=\frac{f_0D}{D-2\Delta l}\ . \qquad (3)$$

Розв'яжімо рівняння (1), (2) і (3) та отримаймо:

$$d_2=\frac{Dd_0F}{Dd_0-(D-2\Delta l)(d_0-F)}\approx 1{,}4\text{ м}\ .$$

D – діаметр лінзи, Δl – розмитість зображення, F – фокусна відстань лінзи.

Аналогічно можемо розв'язати задачу для випадку $d_1>d_0$.

ДОДАТКИ

Про наближені обчислення

Числові значення величин, з які використовують, розв'язуючи задачі з фізики, є наближеними (не точно встановлені). Такими величинами є константи, які наведені в довідниках, наприклад, для нормального прискорення вільного падіння – 9,81 м/с^2, відношення довжини кола до діаметра – 3,14, маси електрона – $9{,}11\cdot10^{-31}$ кг тощо. При точнішому обчисленні та вимірюванні ці величини дорівнюють $g=9.80665$ м/с^2, $\pi=3{,}1415926$, $m_e=9{,}106\cdot10^{-31}$ кг. Однак ці значення також є наближеними.

Часто при обчисленнях недосвідчені учні й студенти досягають такої точності результатів, яка зовсім не виправдовується точністю використаних даних. Це призводить до даремних витрат праці й часу.

Розгляньмо приклад. *Потрібно визначити густину тіла.* Зважуючи тіло на терезах з точністю до 0,01 г, визначили його масу: $m=9{,}38\pm0{,}01$ г. Після цього з точністю до 0,01 см^3 виміряли об'єм тіла: $V=3{,}46\pm0{,}01$ см^3.
Без критичного підходу до обчислень можна отримати:

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{9{,}38\text{ г}}{3{,}46\text{ см}^3}=2{,}71098\ \text{г/см}^3\ .$$

Але оскільки числа 9,38 та 3,46 наближені, то останні цифри в них є сумнівними. Зважуючи з вказаною точністю, допускається похибка на 0,01. Тому ці числа могли б бути й такими: перше – 9,39 або 9,37, друге – 3,45 або 3,47. Отже, густина тіла, якщо її порахувати з точністю до п'ятого десяткового знаку, як це зроблено вище, була б:

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{9{,}37\text{г}}{3{,}47\text{см}^3}=2{,}70028\ \text{г/см}^3\text{, або } \rho=\frac{m}{V}=\frac{9{,}39\text{ г}}{3{,}45\text{ см}^3}=2{,}72174\ \text{г/см}^3\ .$$

Наведені результати відрізняються вже другими десятковими знаками, тобто достовірним є лише перший десятковий знак, а другий – сумнівний. Цифри, що виражають наступні десяткові знаки, є зовсім випадковими і здатні лише ввести в оману того, хто використовує ці результати. Зусилля на розрахунки такої кількості цифрових розрядів витрачені марно. Отже, доцільно розраховувати лише достовірні розряди та сумнівний. В розглянутому прикладі слід було б рахувати результат до другого десяткового знаку:

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{9{,}38\text{г}}{3{,}46\text{см}^3}=2{,}71\ \text{г/см}^3\ .$$

Наближені розрахунки слід проводити за правилами:

1. ***При додаванні та відніманні*** наближених чисел кінцевий результат заокруглюють так, щоб він не мав значущих цифр* у тих розрядах, які відсутні хоча б в одному з наближених даних.

Наприклад, при додаванні чисел

$$4{,}462 + 2{,}38 + 1{,}17273 + 1{,}0262 = 9{,}04093$$

слід суму заокруглити до сотих долей, тобто заокруглити 9,04.

2. ***При множенні*** слід заокруглювати співмножники так, щоб кожен з них містив стільки значущих цифр, скільки їх має співмножник з найменшою кількістю таких цифр.

Наприклад, замість обчислення виразу

$$3{,}723 \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}1846$$

слід обчислювати

$$3{,}7 \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}2.$$

У кінцевому результаті слід залишати таку кількість значущих цифр, скільки їх мають співмножники після їхнього заокруглення.

У проміжних результатах слід зберігати на одну значущу цифру більше. (Такого ж правила дотримуються і при діленні наближених чисел).

3. ***При піднесенні до степеня*** слід у результаті залишати стільки значущих цифр, скільки їх є в основі степеня. Наприклад,

$$1{,}32^2 \approx 1{,}74\,,$$

$$\sqrt{1{,}17\cdot 10^{-8}} \approx 1{,}08\cdot 10^{-4}.$$

4. ***При розрахунках складних виразів*** слід застосовувати вказані правила відповідно до кожної дії. Наприклад,

$$\frac{(3{,}2+17{,}062)\sqrt{3{,}7}}{5{,}1\cdot 2{,}007\cdot 10^3}.$$

Співмножник 5,1 має найменше число значущих цифр – дві. Тому результати всіх проміжних розрахунків округлюють до трьох значущих цифр:

$$\frac{(3{,}2+17{,}062)\sqrt{3{,}7}}{5{,}1\cdot 2{,}007\cdot 10^3} \approx \frac{20{,}3\cdot 1{,}92}{10{,}3\cdot 10^3} \approx \frac{39{,}0}{10{,}3\cdot 10^3} \approx 3{,}79\cdot 10^{-3}.$$

Після округлення результату до двох значущих цифр отримуємо $3{,}8\cdot 10^{-3}$.

**Значущими цифрами* називаються всі цифри, крім нуля, а також нуль, якщо він стоїть між значущими цифрами та в кінці числа й відомо, що одиниць відповідного розряду в цьому числі немає.

Довідкові таблиці

1. Формули алгебри та тригонометрії

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$Z = a + ib \qquad Z^* = a - ib$$

$$Z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad Z^* = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$Z = \rho e^{i\varphi} \qquad Z^* = \rho e^{-i\varphi}$$

$$|Z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad ZZ^* = |Z|^2$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} \qquad \mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\beta \pm \mathrm{ctg}\,\alpha}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta = \pm\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} \qquad \mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

2. Формули диференціального та інтеґрального числень

$$\frac{d(uv)}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d(u/v)}{dx}=\frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)$$

$$\frac{d(x^m)}{dx}=mx^{m-1} \qquad \frac{d(e^x)}{dx}=e^x$$

$$\frac{d(\ln x)}{dx}=\frac{1}{x} \qquad \frac{d(a^x)}{dx}=a^x\ln a$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x \qquad \frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$$

$$\frac{d(\mathrm{ctg}\,x)}{dx}=-\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \frac{d(\mathrm{tg}\,x)}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d(\arccos x)}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d(\mathrm{arctg}\,x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d(\mathrm{arcctg}\,x)}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d(F(U(x)))}{dx}=\frac{d(F(U))}{dU}\cdot\frac{dU(x)}{dx}$$

У формулах інтегрування сталу інтегрування опустімо:

$$\int x^m dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1} \text{ (при } m\neq 1\text{)} \qquad \int\frac{dx}{x}=\ln x$$

$$\int \sin x dx=-\cos x \qquad \int \cos x dx=\sin x$$

$$\int \mathrm{tg}\,x dx=-\ln|\cos x| \qquad \int \mathrm{ctg}\,x dx=\ln|\sin x|$$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| \qquad \int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \sin^2 x dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x \qquad \int \cos^2 x dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}\,x \qquad \int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\,x$$

3. Формули наближених обчислень

Якщо $x \ll 1$, то в першому наближенні можна прийняти:

$$(1\pm x)^n\approx 1\pm nx\ ,$$

$$e^x\approx 1+x\ ,$$

$$\ln(1+x)\approx x\ .$$

Якщо кут α малий ($\alpha<5°$ або $\alpha<0{,}1$ рад) і виражений в радіанах, то в першому наближенні можна прийняти:

$$\mathrm{tg}\,\alpha\approx\sin\alpha\approx\alpha\ ,\quad \cos\alpha\approx 1\ .$$

4. Множники та префікси для утворення десяткових, кратних, дольних одиниць та їх найменувань

множник	Префікс		множник	Префікс	
	назва	позна-чення		назва	позна-чення
10^{18}	екса	Е	10^{-1}	деци	д
10^{15}	пета	П	10^{-2}	санти	с
10^{12}	тера	Т	10^{-3}	мілі	м
10^{9}	гіга	Г	10^{-6}	мікро	мк
10^{6}	мега	М	10^{-9}	нано	н
10^{3}	кіло	к	10^{-12}	піко	п
10^{2}	гекто	г	10^{-15}	фемто	ф
10^{1}	дека	да	10^{-18}	атто	а

Примітка. Перераховані в таблиці множники і префікси використовують для утворення кратних та дольних одиниць від одиниць Міжнародної системи і від позасистемних одиниць, які ще використовуються.

Префікси гекто-, дека-, та санти- застосовують тільки в найменуваннях кратних та дольних одиниць, які вже отримали широке розповсюдження (гектар, декалітр, дециметр, сантиметр тощо).

Префікси слід вибирати так, щоб числові значення величин знаходились у межах від 0,1 до 1000. Наприклад, для вираження числа $7{,}5\cdot10^{-5}$ м слід вибрати префікс мікро, а не префікс мілі чи нано. З префіксом мікро отримаємо $7{,}5\cdot10^{-5} = 75$ мкм, тобто число, яке знаходиться в межах від 0,1 до 1000. З префіксом мілі отримаємо $7{,}5\cdot10^{-5} = 0{,}075$ мм, тобто число, менше від 0,1, а з префіксом нано – $7{,}5\cdot10^{-5} = 75000$ мм, тобто число, більше за 1000.

Найменування та позначення десяткових кратних та дольних одиниць утворюють приєднанням префіксів до найменувань вихідних одиниць, Приєднання двох (чи більше) префіксів підряд не допускається. Наприклад, замість одиниці „мікромікрофарада" застосовують одиницю „пікофарада". Позначення префікса пишуть разом з позначенням одиниці, до якої її приєднують.

При складному найменуванні похідної одиниці СІ префікс приєднують до найменування першої одиниці, що входить у добуток чи чисельник дробу. Наприклад, кПа·с/м, а не Па·кс/м.

Як виняток, інколи допускається приєднання префікса до назви одиниці, що входить в знаменник дробу (у випадках, коли це знайшло широке розповсюдження). Наприклад, кВ/см, А/мм^2. Однак, з метою спрощення й уніфікації одиниць слід поступово переходити до правильно утворених одиниць (наприклад, від ампера на квадратний міліметр до мегаампера на метр квадратний тощо). Крім, десяткових кратних і дольних одиниць допускають до використання кратні та дольні одиниці часу, плоского кута та відносних величин, які не є десятковими. Наприклад, одиниці часу (хвилина, година, доба); одиниці плоского кута (градус, хвилина, секунда).

5. Основні фізичні сталі

Нормальне прискорення вільного падіння	$g = 9{,}31$ м/с^2
Ґравітаційна стала	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Стала Авоґадро	$N = 6{,}02\cdot10^{-23}$ моль$^{-1}$
Молярна газова стала	$R = 8{,}31$ Дж/(К·моль)
Стандартний об'єм*	$V = 22{,}4\cdot10^{-3}$ м^3/моль
Стала Больцмана	$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К
Стала Фарадея	$F = 9{,}65\cdot10^{7}$ Кл/моль
Елементарний заряд	$e = 1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл
Маса електрона	$m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг
Швидкість світла у вакуумі**	$c = 3{,}00\cdot10^{8}$ м/с
Атомна одиниця маси	1 а.о.м. = $1{,}66\cdot10^{-27}$ кг
Електрична стала	$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
Магнетна стала	$\mu_0 = 4\cdot\pi\cdot10^{-7}$ Ґн/м

---

*Молярний об'єм ідеального газу при нормальних умовах

**Точніше, швидкість світла $c = 299792{,}462 \pm 0{,}018$ км/с.